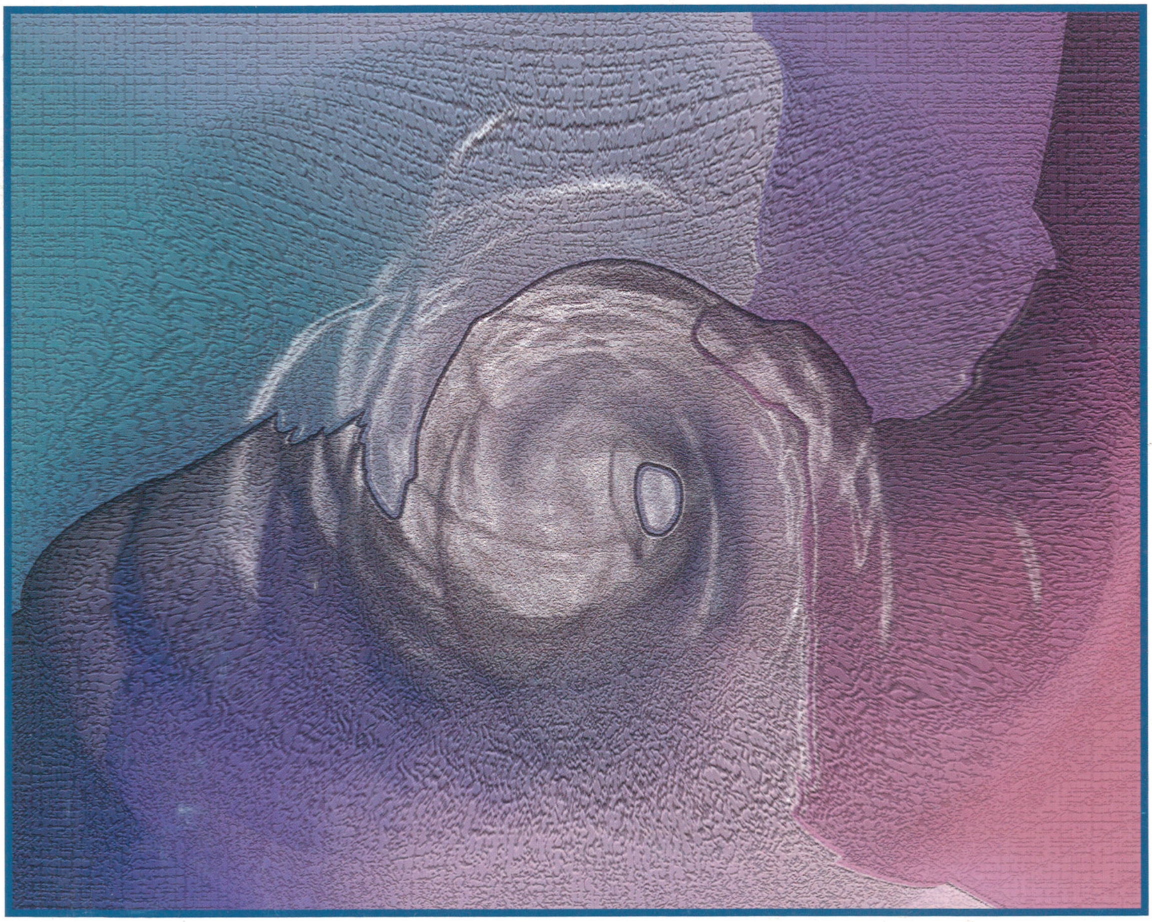
昭和38年７月２日第３種郵便物認可
2011年10月１日発行　第49巻10号　毎月１回１日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

10
2011

特集　時空と熱力学
ブラックホール熱力学の多彩な広がり



No.580

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 580 October 2011

時空と熱力学

ブラックホール熱力学の多彩な広がり

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，半年間（本誌のみ）5,500 円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2008 年/11 省略
2008 年/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010 年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011 年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー

数理科学臨時別冊一覧

10 年/6 非線形現象と微分方程式
10 年/7 数物系のための圏論
10 年/9 超弦理論を学ぶための場の量子論
10 年/10 重点解説 ジョルダン標準形
10 年/11 重点解説 ベクトル・テンソル
10 年/12 行列解析の基礎
11 年/1 超弦理論の基礎
11 年/3 繰りこみ群の物理と数理
11 年/4 超重力理論
11 年/6 共形場理論
11 年/9 演習形式で学ぶ相転移・臨界現象

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
丸善多摩センター店
ジュンク堂書店吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂書店（盛岡）
丸善津田沼店
ジュンク堂書店（新潟）
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都 BAL 店
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂書店三宮店
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂書店旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
ジュンク堂書店（秋田）
ジュンク堂書店郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北 1 店）
九州大学（理系）

October 2011 MATHEMATICAL SCIENCES Number 580

特集／時空と熱力学

熱力学と重力の意外に深い関係

ブラックホール熱力学の多彩な広がり

太田　信義

1. ブラックホールと熱力学

物理学の理論として，力学や電磁気学のように基本的な法則が与えられていて，物体の間に働く力，作用が決まっている理論がある．これに対して熱力学は，熱に関する性質を基礎として出発し，その性質がなぜ成り立つかは問わずに，そこから得られる結論だけで理論を構成するやり方をとる．現象論と呼ばれる手法である．現在では熱力学の基礎は量子統計力学により与えられているが，熱力学はそれを導く微視的理論がどのようなものであるかを問うことなしに，適用範囲を誤らなければ必ず成立する．したがって模型などに依らない普遍的な有効性を持つのである．

現在，重力理論はアインシュタインの一般相対論で定式化されており，惑星の近日点移動や重力による光の曲がりなどの観測事実により，その予言ははっきりと確かめられており，疑いもなく基礎理論として確立していると考えてよい．したがって，その解であるブラックホールを考えたとき，熱力学的性質が成り立っているというのは大きな驚きをもって受け止められたに違いない．

詳しいことは前田氏の見事な解説にまとめられているが，アインシュタインの一般相対性理論には，ブラックホールを与えるシュヴァルツシルト解がある．この解においては，事象の地平線（ホライズン）と呼ばれるところがあり，その内部から外部へは情報が伝わらないことはよく知られている．これは，ブラックホールの系はいわゆる混合状態となってエントロピーが発生することを示唆する．その具体的な最初の兆候はブラックホール解発見から50年以上経った1971年，ホーキングによって発見された．彼は弱いエネルギー条件と宇宙検閲仮説により，ブラックホールを含む古典的過程では，ホライズンの面積が減らないことを示したのである．このことは，ホライズンの面積が熱力学のエントロピーと類似していることを示唆している．続いて1972年，ベケンシュタインは思考実験に基づき，ブラックホールはホライズンの面積 A に比例するエントロピー S を持つことを提唱した．しかし彼は比例定数を決定することはできなかった．さらに1973年，バーディーン，カーター，ホーキングは，ブラックホールが熱力学法則と類似した4つの法則を満たすことを示した．

以上はブラックホールが温度を持つことを示唆するが，彼らは $T=0$ と考えていた．なぜなら，有限温度だと輻射が出るはずだが，ブラックホールからは何も出てこないはずだからである．これは1つのパズルとして残されていたが，1975年，ホーキングがブラックホールは，半古典的に輻射

を出し，それはある一定の温度 T のプランク分布をしていることを示したことにより解決された．このように，ホーキングの結論は今から見ると必然的なものであったと感じられるのだが，量子論を考えるとブラックホールから何かが出てくるという主張は驚きを持って迎えられたであろう．この結果，比例定数が決まり，$S = \frac{A}{4}$ の関係が得られた．この場合，ブラックホールだけでなく系全体のエントロピーは増大するという一般化された第 2 法則が成立することが示されている．

以上の熱力学的関係および法則は，単にアインシュタイン重力に限らず，より一般の重力理論のブラックホール解に拡張できることがわかっている．このとき，温度 T は虚数時間への解析接続で決まる．一方，エントロピー S は一般化が必要となる．それは熱力学第 1 法則 $TdS = dM$ により決まる（M はブラックホールの質量）．これはネーター電荷と一致することが示されている．

これらの話は，熱平衡状態に関するものである．しかしブラックホールができる過程は動的なものであり，現実には非平衡の場合への拡張が必要になると思われる．これらの基礎を含めた解説が，磯氏によって与えられている．

また，ここでのブラックホールの熱力学は，通常の我々の住んでいる 4 次元のブラックホールに関するものであることを注意しておく．

2. ブラックホールとホログラフィー原理，AdS/CFT 対応

ブラックホールのエントロピーはホライズンの表面積で与えられる．このことはブラックホールに関する情報は，その 3 次元体積ではなく 2 次元表面にあることを意味している．これを標語的に，ホログラフィー原理と言う．これが 1997 年のマルダセナの AdS/CFT 対応の提唱により具体化された．ただし，そこでは我々の 4 次元時空（3 次元空間）が 2 次元に写像されるのではなく，5 次元時空の境界の 4 次元との対応であり，具体的には 5 次元の AdS 時空とその境界上の 4 次元で実現されている超対称共形場理論（$N = 4$ 超対称性理論）との対応が示唆された．これはさらに一般化されており，この時空でブラックホール解を考えることは場の理論側では有限温度を考えることに対応しており，非可換時空の場の理論を含む場の理論の非摂動的性質の解明やクォーク・グルーオンの物理への応用が拡がった．福嶋氏の解説はこれを手際よく示してくれている．さらなる一般化として，物性系への応用やエンタングルメントエントロピーへの応用は，御自身の仕事も交えた高柳氏と畔柳氏の解説をご覧いただければと思う．

ここでのブラックホールは 5 次元やそれより高次元のもの，非平衡系への拡張，また物性系への応用の場合は 4 次元や 3 次元で電磁場などの入っているものが重要になる．

3. ブラックホールと重力の微視的理論

ブラックホールの満たす熱力学的関係は，より一般の時空に拡張されている．曲がった時空における量子場の理論を調べるとホライズンのあるどんな時空においても温度があることがわかった．これは時空を温めることができることを意味すると思われるが，それはボルツマンが統計力学を定式化したのとの類推で，微視的構成子が存在することを意味すると考える人もいる[1)]．一方，熱力学は，微視的構造，理論の詳細によらず普遍的に構成できるので，このようにして普遍的な重力理論が構成されると期待される．これがもし正しければ，**アインシュタイン方程式は状態方程式として理解するべきもの**であり，基本方程式ではないということになる．この場合，重力理論のくりこみ可能性は問題でなくなり，ダークエネルギー問題も解決するかも知れない．実際，ヤコブソンは，ある種の状況下では，アインシュタインの重力方程式が再現されることを議論している．さらに最近，フェアリンデもこの立場をさらに推し進め，重力がエントロピー力であるという議論を展開して

いる．これらの非常に示唆に富んだ最近の発展は，福間氏が解説している．

そもそもブラックホールは，一般相対論では「無毛定理」として知られているように，質量，電荷，角運動量を与えると一意的に決まってしまうので，単純にその持つ自由度でエントロピーを定義すると 0 か小さな数になってしまう．それがなぜホライズンの面積という巨視的な量になるのか？ 超弦理論のブレインによるブラックホール解の解釈によりその理解が可能になった．このわくわくする結果は，橋本氏の解説で堪能されたい．このとき，ブラックホールの自由度がある意味ゲージ場の自由度で勘定されることに注目したい．AdS/CFT 対応も，重力理論とゲージ理論がある意味で同等であるという主張であり，状況によっては重力が必ずしも基本的な自由度ではないことを示唆する．やはり，超弦理論は重力の微視的理論になっているのであろうか，それともゲージ理論で十分なのであろうか？ その場合，一見独立な自由度として入っているように見えるグラビトンはどのように解釈されるようになるのであろうか？ 目が離せないところである．

本特集では他に 2 つのコラムがある．1 つは，ややもすると理論的な側面に走りがちな人々を現実に引き戻したり，荒唐無稽とも見える予言を実験で裏付けてくれる実験家駒宮氏による，高次元理論のブラックホールは検出できるかという話である．はっきりわかっていないために，確かめてみる価値があるかもしれないことは世の中にごまんとある．昔，クローニンとフィッチは「そんなことはあるはずがない」と多くの人が考える中で実験し，CP 非保存を発見して，後にノーベル賞を受けた．半信半疑ながらやってみるのは実験家の性でもあろうが，実験はやってみなければわからないのである．もちろん外れることもある．

もう 1 つは，エントロピーに発する宇宙の時間の矢と初期宇宙に関する話題である．白水氏の肩の凝らない話をお楽しみいただけると思う．

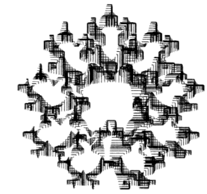
ブラックホール熱力学の端緒が得られてからすでに 40 年が経った．しかし，その意義が失われることは決してないだろうし，ますます重要性を深めていくようである．意外なことに，重力理論の根幹に関わっているかもしれない様相を見せてきた．ここでその意義をしっかり受け止め，発展させることは我々に残されている重要な課題の 1 つである．

参考文献

1) T. Padmanabhan, *Rept. Prog. Phys.* **73** (2010) 046901 [arXiv:0911.5004 [gr-qc]].（この文献を引用している解説がないのでつけた．他のものは以下の解説にある．）

（おおた・のぶよし，近畿大学理工学部）

ブラックホール熱力学入門



前田　恵一

1. 熱力学の裏にあるもの

20 世紀初頭の相対論・量子論登場前の物理学を古典物理学と呼ぶ．物体（流体のような連続体を含む）の運動はニュートン力学で，電磁現象はマックスウェルの電磁気学で理解される．それらが古典物理学の中で最も基本的な法則を与えるのに対し，熱力学は理論として特異な位置にある．熱現象は，「熱素」なる熱を伝える基本要素があると考えられた時期もあったが，実はそれが多粒子系の巨視的な現象で，個々の構成粒子の基本法則とはかけ離れた，粒子集団としての性質を記述するものである．この熱力学は，熱平衡状態にある物理系を支配する以下の 3 つの物理法則を中心とした現象論的理論体系として 19 世紀半ばから後半にかけて完成された．**熱力学第 1 法則**は，エネルギー保存則で

$$dE = TdS - PdV \tag{1}$$

と表される．ここで E, T, S, P, V はそれぞれ内部エネルギー，温度，エントロピー，圧力，体積である．**第 2 法則**は，エントロピー増大則とも呼ばれ，熱的過程の進む向きを与える法則である．**第 3 法則**はネルンストの定理とも呼ばれ，絶対零度は到達不可能であるとされる．また，「物体 A と物体 B が熱平衡で，物体 B と物体 C が熱平衡にあれば，物体 A と物体 C も熱平衡にある」とする熱平衡の基本的な考え方は熱力学**第 0 法則**とも呼ばれる．熱平衡を特徴付ける尺度が温度 T であるので，熱平衡にある物体の温度 T は同じであるともいえる．

熱力学は，いろいろな実験結果をうまくまとめ，現象記述に必要な要素のみを取り出した究極の経験則といってよい．アインシュタイン（A. Einstein）自身も，特殊相対性理論を考え出した頃「理論というものは，前提が単純であればあるほど，またより多くの事実を関連づければ関連づけるほど，さらにその適用範囲が広ければ広いほど，強い感銘を与えるものである．それ故に，古典熱力学は私に強い感銘を与えたのであった．それは普遍的な内容を包含する唯一の物理理論であり，その基本概念の適用範囲において，この理論が破棄されることは決してないと私は確信している」といっている[1]．絶対的な信頼である．

この熱力学は巨視的な熱現象を記述するのに十分ではあるが，なぜそうなのかというもっと根本的な問いには答えてはいない．現象論と言われる所以である．そして熱力学の本当の理解は，ミクロな視点に立った統計力学の登場によって得られることになる．熱現象は，マックスウェル（J.C. Maxwell）によって示されたようにミクロな原子・分子のランダム運動で理解できる．その結果，系の一つの巨視的な熱力学的状態は，すべての粒子状態を完全に決定したものではなく，ミクロな視点では非常に多くの状態に対応することになる．この考え方から，ボルツマン（L.E. Boltzmann）

は有名なエントロピーの公式

$$S = k_B \ln W \tag{2}$$

に辿り着いた．ここで，k_B はボルツマン定数，W は系の可能な状態数である．この状態数は，古典的には相空間に人為的な有限最小体積を導入しない限り無限個の状態が取り得るので曖昧性が残るが，量子論的には，不確定性原理から相空間の最小体積が自然に与えられ，ちゃんと数え上げることができるので，明確な意味を持つ．p_i を系が i 番目の状態にある確率とすると，エントロピーは，

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i \tag{3}$$

のように与えられる．考えられるすべての状態数を数え上げたものを状態和といい，熱力学量および熱力学の法則はエントロピーだけでなくすべてその状態和から導かれる．マクロな熱力学の本質が**量子統計力学**によりミクロな観点から解明されたのである．

■　2. ブラックホールの力学　■

その熱力学が思いもかけないところで全く異なる分野の物理学と繋がった．**ブラックホール**である．ブラックホールは，アインシュタインの一般相対性理論が生み出した新しい天体で，時空が極端に歪んだ世界を表す「一般相対性理論の寵児」である．多粒子系とは全く関係のないアインシュタイン方程式の真空解がどうして熱力学と関係するのであろうか．まずはブラックホールそのものの性質を見てみよう．

ブラックホールは，周りにあるものを吸い込み，またそこからは何も放出しない天体である[2)]．そのような一方通行の世界では，「周りのものを吸い込みながらだんだん大きくなっていくだろう」と予想される．このことを数学的に厳密に証明したのがホーキング（S.W. Hawking）で，ブラックホールの**表面積増大則**として知られている[3)]．この表面積増大則は，ブラックホール地平線の表面積を A とすると

$$dA \geq 0 \tag{4}$$

と表される．

ブラックホールは複雑なアインシュタイン方程式の解の一つで，事象の地平線という一方通行の表面をもつ奇妙な天体であるが，意外にその性質は単純である．例えば，ブラックホールには唯一性定理があり，ブラックホール解は質量 M，角運動量 J，電荷 Q だけで表されるカー・ニューマン時空で一意的に与えられる[4)]．また，ブラックホールの質量については，**質量公式**というものがわかっており，

$$M^2 = \left(M_{\mathrm{ir}} + \frac{Q^2}{4M_{\mathrm{ir}}^2} \right)^2 + \frac{J^2}{4M_{\mathrm{ir}}^2} \tag{5}$$

と表される[5)]．ここで，M_{ir} は次のような意味をもつ質量である．一般に，質量とエネルギーの等価性から，質量 M には回転エネルギーや電気的エネルギーなどの付帯的エネルギーも含まれるが，それらはペンローズ過程などを使って原理的にはブラックホールから取り出せる[6)]．それに対し，M_{ir} は，いったんできたブラックホールからは取り出せない「静止質量」に対応している．実際，事象の地平線の表面積は $A = 16\pi M_{\mathrm{ir}}^2$ と表されるが，表面積増大則 (4) から，M_{ir} は絶対に減らないことがわかる．

ブラックホールに小さな物体（質量 dM，角運動量 dJ，電荷 dQ）が落下したときに増加する表面積 dA は，(5) の微分形

$$dM = \frac{1}{8\pi}\kappa dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ \tag{6}$$

で与えられる．ここで，κ は**表面重力加速度**で，また

$$\Omega_H = \frac{a}{r_H^2 + a^2}\ , \quad \Phi_H = \frac{r_H Q}{r_H^2 + a^2} \tag{7}$$

は，それぞれブラックホールの回転角速度，地平線上の静電ポテンシャルの値で，(6) 式右辺の最後の2項は物体がブラックホールに落下するときにする仕事を表す．また，$r_H = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$ は地平線の半径で，a は単位質量あたりのブラックホールの角運動量 $a = J/M$ である．この (6)

式は，エネルギーと質量が等価であるとすると，熱力学の第 1 法則 (1) と似ている．また，面積増大則 (4) から面積 A は熱力学のエントロピー S と同じように一方的に増大する．この類似性が正しいとすると，κ, A はそれぞれ（係数を除いて）T, S に対応していると考えられる．

そのことはさらに次のことで支持される．いま，天体表面の重力加速度を考えてみよう．普通の星の表面重力加速度はどこも同じではない．地球表面上の重力加速度 g はおよそ 980cm/sec^2 であるが，中心から地表までの距離や地下にどのようなものが埋まっているかで，正確な値は場所によって異なる．ところが，ブラックホールでは，地平線上の表面重力加速度 κ は

$$\kappa = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}}{2M[M+\sqrt{M^2-a^2-Q^2}]-Q^2} \qquad (8)$$

で与えられ，場所によらない．赤道面上の値も回転軸上の値も全く同じになる．この $\kappa =$ 一定という事実から，熱平衡では温度 T が一定になることを考えると，κ が T に対応するというのがもっともらしく思える．

さらに，星が重力崩壊してできる最終時空構造がブラックホールで，裸の特異点は現れない（ペンローズの**宇宙検閲官仮説**[6)]）とすると，その条件はブラックホールの回転や電荷に制限を与える $(a^2+Q^2 \leq M^2)$．あまり速く回転していたり，大きな電荷を持っていたりすると，地平線が消滅し，中にある特異点が直接見えてしまうのである．このぎりぎりいっぱいの回転や電荷を持ったブラックホールを極限ブラックホールと呼ぶが，その表面重力加速度 κ はゼロになる．宇宙検閲官仮説が正しいとすれば，極限ブラックホールを超える回転や電荷を持った“ブラックホール”（つまり裸の特異点）は存在しないということになり，表面重力加速度ゼロが限界となる．有限操作でこの限界に到達できなければ，まさに熱力学第 3 法則に対応するものが存在することになる（今のところ仮説の段階であるが…）．

このように，ブラックホールの力学では，その対象が全く異なり，多粒子系ではないにも関わらず，熱力学の法則に極めて似た法則が成立していることがわかる．(6) 式は熱力学第 1 法則に，面積増大則 (4) はエントロピー増大則（第 2 法則）に対応する．表面重力加速度 κ を温度 T とすると地平線上で重力加速度が一定というのは，熱平衡条件である温度一定という事実（第 0 法則）に対応する．さらに，思考実験で表面積 A がエントロピー S に対応するという議論もある[7)]．これらの類似性をまとめると表 1 のようになる[8)]．

表 1　熱力学とブラックホール力学の法則の類似性．

熱力学	ブラックホール力学
第 0 法則	
熱平衡では 温度 T が一定	事象の地平線上で表面 重力加速度 κ が一定
第 1 法則	
エネルギー保存則 $dE = TdS - PdV$	質量変化の公式 $dM = \frac{1}{8\pi}\kappa dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ$
第 2 法則	
エントロピー増大則 $dS \geq 0$	面積増大則 $dA \geq 0$
第 3 法則	
ネルンストの定理： 絶対零度（$T=0$） には到達できない	宇宙検閲官仮説： 裸の特異点は存在しない （極限状態では $\kappa = 0$）

このような「類似性」だけで議論を展開すると一般的には大きな失敗をする．一見同じように表される法則もその本質が全く異なるということも多い．いすの足も犬の足もどちらも 4 本だから「いす」と「犬」は似ているなどという論理が暴論であるのは明らかだ．

3. ブラックホールの蒸発と熱力学

それにしてもそれらはよく似ている．この類似性は偶然なのであろうか？ そうではない．ブラックホールを熱力学的対象と考える根拠がある．これは重力場中での粒子の量子論的振舞いの研究から見つかった．宇宙の始まりの様子を研究しよう

と曲がった時空における場の量子論の研究が，1960年代末に始まった[9]．また，回転ブラックホールからエネルギーを取り出すペンローズ過程を量子論的に取り扱うと，自発的にエネルギー放射が起こること（超放射現象）も知られていた[10]．

そして，重力崩壊によってブラックホールが形成される過程を考えると，ブラックホール周りの粒子の量子効果により，ある温度 T の熱的分布した熱輻射としてそれらの粒子が放出されることをホーキングが示した[11]．回転のないシュヴァルツシルトブラックホールの場合，その温度は $T=(8\pi M)^{-1}$ と，質量 M に逆比例する．太陽質量程度のブラックホールではその温度は非常に低く（約 10^{-6}K），そのような効果は現実的には無視できる．実際，このブラックホールが蒸発し消滅するのに宇宙年齢（約140億年）の 10^{54} 倍かかってしまう．このように，宇宙で形成されるブラックホールでは確かにそのような効果を考える必要はない．ではどのようなブラックホールなら量子論が必要となるのであろうか？

量子論では考えている粒子は2つの側面（「粒子性」と「波動性」）をもつ．質量 m を持った粒子がその波動性を示すスケールがコンプトン波長（$\hbar/mc$）である．例えば，電子では 3.8×10^{-11}cm，陽子では 2.1×10^{-14}cm になる．もしそんな小さなブラックホールが存在すれば，その周りを取りまく粒子は量子論的波動性を示し，ホーキングが示した粒子の熱放射も意味のあるものになると考えられる．例えば，シュヴァルツシルト半径（$2GM/c^2$）を陽子のコンプトン波長と等しくおくと，ブラックホールの質量は $M=1.4\times10^{14}$ g となる．これは小惑星ぐらいの天体がブラックホールになっていることになる．そのように小さなブラックホールの周りでは物質場を量子論的に扱う必要が出てくる．一方，時空の量子論的効果が重要となるスケールはというと，$G, c, \hbar$ からつくられるプランク長（1.6×10^{-33}cm）やプランク質量（2.2×10^{-5}g）であろう．つまり，物質場の量子論が効くスケールと時空の量子論が必要となるスケールには大きな隔たりがある．それで時空を古典的に扱い，物

質場を量子化するという半古典的アプローチが正当化されると考えられている．

そして，古典的時空によって表されるブラックホール形成過程で物質場の量子論を考えると，何でも吸い込むはずのブラックホールから粒子が量子論的に放出されるのである[11)]．古典論では起こり得ない現象が起こる．これをブラックホールの熱輻射とか**ホーキング輻射**と呼ぶ．放出粒子の種類は，81%がニュートリノ，17%が光子，残りの2%が重力子である．質量を持った粒子も放出されるが，生成されるときその質量エネルギー分だけ損をするので効率が下がり，蒸発最後の非常に高温のときを除き，ほとんど出てこないと考えてよい．この $10^{14\sim15}$g 程度の小さなブラックホールが本当に宇宙に存在すれば，いま正に蒸発によって消滅しようとしているところである．粒子が放出されるとブラックホールはもちろんエネルギーを失い，それだけ質量が減少する．質量が減るとそれに逆比例して温度は上昇するから，熱輻射の放出率は高くなる．その結果ブラックホールは加速的にその質量を失い，最後には蒸発して「消滅」する．この最後の瞬間は蒸発などという生易しいものではなく，「爆発」に近い．最後の1秒間で1000トンもの質量がすべてエネルギーに変換され，消滅する．その様子は，高エネルギー γ 線バーストとして観測されるはずであるが，現在のところまだその証拠は見つかっていない．

回転しているブラックホールに対しても同様の計算は可能で，その熱輻射を表す温度 T は

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} \tag{9}$$

となる．これから，熱力学との類似性が正しいとすると，ブラックホールのエントロピーは

$$S = \frac{A}{4} \tag{10}$$

となる．ブラックホール力学と熱力学の類似性は予想もしなかったところで，その係数まで決定された．単なる類似性だけからはわからなかった係数が，ミクロな量子的過程を考えることにより決定されたのである．

しかし，ブラックホールエントロピーが地平線の表面積に比例するとすると少しおかしなことが出てくる．ブラックホールが蒸発するとすればブラックホールは小さくなっていくので，当然その表面積も減少する．ということは，ブラックホールエントロピーが減少することになる．量子論を考えることによってブラックホール温度が決定され，ブラックホールを熱力学の対象と考えて良い根拠が出てきた．しかし，そのことが逆に，第2法則に対応する面積増大則が破れることになり，ブラックホール力学と熱力学の類似性の大きな根拠が崩れることになる．ブラックホールの熱力学はやはり意味がないのであろうか？

もう少し慎重に考えよう．普通の熱力学では，閉じた系のエントロピーは増大するが，開いた系では必ずしもそうでない．全エントロピーが増大するだけで，一部の系だけに注目した場合，エントロピーは増大しなくてもかまわない．実際，散らかったところを片付けるというのは，その部分のエントロピーを減少させているわけである．しかしその分，周りのエントロピーはもっと増えているわけで，全体としてはエントロピーは増えているのである．ブラックホールの蒸発ではどうであろうか？ ブラックホールだけのエントロピーを考えるのは一部のエントロピーだけに着目しているのと同じと考えられる．ブラックホールの周りには熱輻射が存在するのである．輻射も当然エントロピーを持っているわけで，エントロピーの増減を考えるにはブラックホールと輻射の双方を合わせた全エントロピーを考える必要がある．実際，ブラックホールとその周りの輻射のエントロピーの和は増大することが，思考実験によって示される．このエントロピーの増大則を「**一般化された第2法則**」と呼ぶ[12)]．このように拡張すると，ブラックホールは周りの物質も含めた形で熱力学の第2法則を満たす．ブラックホール力学と熱力学の類似性は，単なる類似性以上の内容を含んでおり，ブラックホールは本当に熱力学的対象と考えないといけないのである．

4. 熱力学を超えて

はじめに熱力学の説明のところで述べたように，熱力学は現象論的理論で，その本質を理解するには物質をミクロな視点から考える量子統計力学を考えないといけない．ブラックホールの熱力学はどうであろうか．熱力学同様にミクロな統計力学的理解が可能なのであろうか．ブラックホールエントロピーはミクロな量子論的考察から導くことができるのであろうか．現時点ではその答えはまだわかっていない．ただ，いろいろなアプローチが試みられている．ブラックホールの温度が場の量子論を考えることによって与えられたのであるから，エントロピーの起源をミクロな視点から考えるときも当然「量子論」が鍵となるだろう．

このときどのような量子論が関係してくるのであろうか？ ブラックホールはアインシュタイン方程式の真空解であるので，古典的には重力場のみが存在する．その周りの物質場の量子論はすでに考えており，まだ考えていないのが重力場，すなわち時空の量子論である．つまりブラックホールエントロピーをミクロなより基本的な法則から理解しようとしたとき，**量子重力理論**が関係してくるのではと考えられる．

相対論的重力理論である一般相対性理論が時空の物理学を誕生させ，量子論が現代物理学の基礎を与えることになったが，それを融合させた量子重力理論は未だに完成されていない．重力場以外の物質場は繰り込み可能で，その量子効果の計算に伴う発散は取り除ける．しかし，重力場は繰り込み不可能で，一般相対性理論の摂動論的量子化はうまくいかない．そこで量子重力理論完成に向けて2つのアプローチが試みられている．一つは，一般相対性理論の正準量子化を非摂動的に真正面から取り組もうというアプローチ，もう一つは，重力を他の力と区別せず，すべての力を，さらにはすべての粒子をも統合する統一理論を考え，その量子化をすることで，重力も一緒に量子化しようという試みである．

前者としては，いろいろな試みがなされている．その一つで注目されているものが**ループ量子重力理論**である[13]．この理論によると，ミクロな時空の量子状態数を数え上げることで，ブラックホールエントロピーが表面積に比例することを導くことができる．(10) 式に一致するように理論に含まれる未知定数を決めてやれば，時空の離散性からその状態数を数え上げることでブラックホールエントロピーを導出することができる．量子重力理論からブラックホール熱力学の統計力学的理解が可能ということになる．ブラックホール熱力学がまさに量子重力理論の突破口になるというわけである．但しこの理論はまだ発展途上で，そのダイナミクスもまだ十分には分かっていない．

一方，後者として最も有力な候補が**超弦理論**である．この理論は，物質粒子（フェルミ粒子）と力を媒介する粒子（ボーズ粒子）を統一する超対称性も兼ね備えた究極の統一理論と期待されている．時空次元も 4 次元ではなく，10 次元でこの理論は構成される．どうして我々の世界が 4 次元（時間 1 次元，空間 3 次元）なのかという疑問に対する答えはまだわかっていないが，量子論における発散の問題などの困難を回避する理論として多くの研究者が期待している統一理論である．もし超弦理論が本当に究極の統一理論であれば，一般相対性理論に現れる困難も解決できることが期待される．特に，重力が強いブラックホールや宇宙初期の諸問題が超弦理論の研究により解き明かされるかもしれない．

そのような期待の下，超弦理論の研究において画期的な発見が報告された[14]．「ブラックホールエントロピーがミクロな状態の状態和から導かれる」というのである．もっとも，極限ブラックホールに対してだけ示されたのであるが．これは，弱結合の極限と強結合の極限の間の「双対性」という対応関係を用いる．ブラックホールは当然強結合領域の対象であるが，それと双対的に対応する弱結合領域の対象（ブレイン）を考えると，そこでは摂動論を使うことができ，状態数の数え上げが可能となる．その状態和を使ってエントロピーを計算すると，対応するブラックホールの公式 (10) に

一致するというわけだ．ブラックホールの種類が限られるとはいえ，ブラックホールエントロピーを統計力学的アプローチで係数まで正しく求められたというのは驚くべきことである．このことは，超弦理論こそが正しい統一理論であるという期待を抱かせる．

しかし，ブラックホール蒸発そのものについて，その最後の最後，ブラックホールの重さがプランク質量以下になったときどうなるかまだよくわかっていない．大きさにしてプランク長，重さにしてプランク質量まで小さくなったブラックホールの運命がよくわからないのである．超弦理論が正しい理論であればその疑問に答えられるはずであるが，今のところ，そのような状況を超弦理論でどのように取り扱ってよいか全くわかっていない．

ここで本特集号のキーワードである「高次元」についても少し触れておく必要がある．超弦理論が10次元で構成されることから，ここ数年，高次元重力に関する研究も活発に行われている．重力は，次元によりその振舞いが大きく変わる．ブラックホールに関しても，4次元時空ではここで議論してきたカー・ニューマン時空解がブラックホールを記述する唯一の解であることが示されているが[4]，次元が高くなるとそのような解の一意性は保証されない．実際に，5次元時空では地平線のトポロジーが球面ではなくトーラスで表されるブラックリング解など，多様なブラックホール解が見つかっている[15]．次元が高くなったことで，重力の振舞いが大きく変わり，ブラックホールの性質も大きく変更を受ける可能性がある．またその熱力学的性質もどのようになるのか興味深いところである．これらの研究の一部は本特集でも取り上げられているが，多くの研究が始まったばかりで，今後の進展が楽しみな分野である[16]．

また，熱力学が現象論であるということは，重力に対する全く違ったアプローチを思い出させる．つまり，ブラックホール熱力学だけでなく一般相対性理論そのものも基礎理論ではなく現象論という考え方である．一般相対性理論が正しいとわかっているのは地球上や太陽系のスケールで，ミクロな世界でどの程度正しいのかはまだよくわかっていない．そこでミクロな世界では全く異なる重力理論が存在し，アインシュタイン方程式は単にその基礎理論の巨視的スケールでの有効理論にすぎないという考え方である．曲がった時空による重力の記述法（一般相対性理論）は，巨視的なスケールでのみ正しいのではないかというわけだ．そうだとすると現象論である熱力学と一般相対性理論の解であるブラックホールの相性が良いのもうなずける．その場合，時空の量子化は意味がなくなる．しかし，ブラックホール熱力学は一般相対性理論の裏に隠れたその基礎理論を見つけ出すための手がかりを与えると考えられる[17]．

ブラックホール熱力学を超えてその基本的理解をするための可能性をいろいろ挙げてきたが，そのいずれの考え方が正しいとしても（また全く別のアプローチが正しいとしても），ミクロな世界のブラックホールは，一般相対性理論を超えた新しい基礎理論の入り口であることは間違いない．その熱力学の起源を解明することは，まだ完成していないミクロスケールの重力理論を探る大きな手がかりに繋がると考えられる．

参考文献

1) 安孫子誠也『アインシュタイン　相対性理論の誕生』（講談社，2004）p.37.
2) 前田恵一『重力理論講義』第8章，第11章（サイエンス社）.
3) S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **25**, 152 (1972).
4) W. Israel, *Phys. Rev.*, **164** (1967), 1776; *Commun. Math. Phys.* **8** (1968), 245; B. Carter, *Phys. Rev. Lett.* **26** (1970), 331; S.W. Hawking, "The event horizon", in *Black Holes* ed. by C. De Witt and B.S. De Witt (1973, New York, Gordon and Breach), p.5; S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The large scale structure of spacetime* (1973, Cambridge Univ. Press); D.C. Robinson, *Phys. Rev. Lett.* **34** (1975), 905.
5) D. Christodolou, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 1596 (1970); D. Christodolou and R. Ruffini, *Phys. Rev.* **4**, 3552 (1971).
6) R. Penrose, *Nuovo Cimento* **1**, 252 (1969).
7) J.D. Beckenstein, *Phys. Rev.* **D7**, 2333 (1973).
8) J.M. Bardeen, B. Carter and S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).
9) L. Parker, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 562 (1968); *Phys.*

Rev. **183**, 1057 (1969).
10) Ya.B. Zel'dovich *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **62**, 2076 (1972); A.A. Starobinskii *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **64**, 48 (1973).
11) S.W. Hawking, *Nature*, **248**, 30 (1974); *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
12) J.D. Beckenstein, *Phys. Rev.* **D9**, 3292 (1974).
13) C. Rovelli, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3288 (1996); C. Rovelli, *Quantum Gravity* (2004, Cambridge Univ. Press)
14) A. Strominger and C. Vafa, *Phys. Lett.* **B379**, 99 (1996); G.T. Horowitz, "The Origin of Black Hole Entropy in String Theory", in Proceedings of the Pasific Conference on *Gravitation and Cosmology*, (Seoul, 1996) (gr-qc/9604051).
15) R. Emparan and H.S. Reall, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 101101 (2002).
16) *Higher Dimensional Black Holes*, Prog. Theor, Phys. Supplement, No.189 ed by K. Maeda, T. Shiromizu, T. Tanaka (to be published, 2011).
17) 前田恵一『重力理論講義』第 20 章（サイエンス社）.

（まえだ・けいいち，早稲田大学理工学術院）

Dブレーンとブラックホール熱力学

橋本 幸士

1. ブラックホールのエントロピーの問題

1996年1月のことである.「超弦理論がブラックホールのエントロピー公式を微視的状態数の数え上げから再現した」という論文が，インターネットで公開された*1).重力理論と超弦理論の研究者たちは「ついに，か」の気持ちでいっぱいであったろう．この論文は A. Storominger と C. Vafa によるもの[1]であった*2).

ブラックホールのエントロピーをその微視的状態から統計的に数え上げて導出せよ，という問題は，長い歴史を持つ．前田氏の解説にもあるように，1972年に J.D. Bekenstein は，ブラックホールのエントロピー S が，ブラックホールの事象の地平面の面積 A に比例するはずであることを発見した[2]：

$$S=\frac{k_{\mathrm{B}}c^3}{4(h/2\pi)G}A. \tag{1}$$

ここで G は重力定数, h はプランク定数, k_{B} はボルツマン定数，c は光速である．エントロピーとは統計力学的には状態数の対数として与えられるが，Bekenstein によるエントロピーの導出は全く異なっていた．熱力学第二法則と，ブラックホールの従うダイナミクスすなわち事象の地平面の面積の時間変化，の類似性から，ブラックホールにおける「エントロピー」を推測したのである．

ブラックホールのエントロピーとは何なのか．そこから長い戦いが始まった．エントロピーが統計力学的に計算されるには，ブラックホールの微視的状態，量子状態を特定できなくてはならない．ここにまず問題が2つある．第一に，量子重力の問題がある．ブラックホールは一般相対性理論の申し子である．重力の運動方程式を解いて出てくる時空解である．従って，量子的な微視的状態が，重力理論で定義されなくてはならない．しかし，重力理論では，素粒子論で良く知られたような量子化の手続きを行うと，処理できない無限大が発生し計算が破綻する（繰り込み不可能性）．第二に，特異点の問題がある．ブラックホールの中心には特異点がある．そこでは，時空の曲率が無限大になっている．特異点は，物理法則が破綻していることを意味している．

さて，超弦理論は，すべての力と物質を統一的に記述できる究極理論の候補である．力には重力も含まれるが，統一的に記述できる，の文言通り，他の力，例えば電磁気力が無矛盾に量子化できているのと同様，超弦理論では重力が量子化でき，無限大の問題が生じないことが知られている*3)．すな

*1） 現在素粒子論や重力理論の分野では，新しい論文はまずインターネットで公開される．プレプリントサーバと呼ばれるインターネットサイトに，研究者は新しい論文をまず投稿する．

*2） それは，私が大学院1年生のときであった．

*3） 厳密に言えば，超弦理論では，無限大の問題が生じないことが期待されており，超弦理論のある種の部分においては実際に無限大が生じないことが計算によって示されている．

わち，超弦理論は量子重力理論であり，上記の第一の問題をクリアしているのである．従って，超弦理論の枠組みを用いれば，ブラックホールのエントロピーの統計力学的な導出も可能であると期待される．いや，むしろ，ブラックホールのエントロピーの統計力学的導出は，完全な量子重力理論の試金石と言っても良かろう．これが，Strominger と Vafa の論文が待ち望まれていたものであった理由である．

この重大な論文が完成した背景には，超弦理論におけるブラックホールの取扱いについての発見が直前にあり，超弦理論の理解が飛躍的に進展した，という歴史がある．超弦理論において，ある種のブラックホールは「**D** ブレーン」と呼ばれる物体と同一視されることが分かったのである．1995 年の J. Polchinski による発見[3]であった．

超弦理論でブラックホールのエントロピーが微視的に導出された論理は，次のようにまとめることができる．

1. D ブレーンは，弦がその端を置くことのできるような膜である（第 2 節）．
2. D ブレーンは，ブラックホールである（第 3 節）．
3. ブラックホールの微視的状態は，D ブレーンにくっつく弦の振動モードで与えられる（第 4 節）．

この 3 つの段階のうち，最も論理的飛躍が大きいのは 2 である．以下では，それぞれを順を追って見ていくことにしよう．

2. D ブレーンは弦がくっつく膜

2.1 超弦理論が生み出す新しい関係

超弦理論とは何だろうか？ 一言で言えば，素粒子が小さなひもでできていると考えることで，素粒子理論の問題を解消するような理論の枠組みである．ブラックホールの問題が超弦理論で説明できるのは，この枠組みのおかげである．

超弦理論は，素粒子が小さなひもからできていると考える理論である．ひもが小さすぎると，点粒子にしか見えない．一方でひもは振動することができるので，小さなひもは結局，点粒子が内部エネルギーを持っているようなもの，と考えてもよい．さらに，振動モードはその節の数で分類できるので，節の数でラベルされるような無限種類の点粒子が，一つのひもから現れることになる．

さらに，点ではなくひもですべての性質を構成するため，計算上において無限大が出て来ない，と考えられている．例えば，ひもではない古典電磁気学では，2 つの電子の距離をゼロまで近づけると，静電ポテンシャルが無限大になるので，エネルギーが無限大になる．一方，電子がひものような広がった物体であれば，このような無限大は現れないであろうと直感的に理解できる．超弦理論が無限大の問題を回避できるのは，おおざっぱに言うとこのような機構なのである．

素粒子がひもからできていると仮定すると，素粒子どうしの力の及ぼし合いなどの性質は，制限を受ける．この制限が，新しい関係式を生み出し，ブラックホールの問題の解決につながった．実際のところ，ブラックホールは重力理論における物体であったが，超弦理論で判明するその微視的状態は，重力とはほど遠いように見える状態，例えば光のようなもの，なのである．この興味深い関係（制限）は，素粒子がひもからできていると仮定した結果である．つまり，一般の素粒子理論では重力と光（つまり電磁気力）は全く別のものとして取り扱われるが，超弦理論を介するとそれらは関係してくるのである．

2.2 ひも以外の「主役」：D ブレーン

超弦理論にはひも以外の登場人物が必須であることが 1990 年代後半に認識され，ブラックホールの微視的状態の理解へとつながった．その登場人物が「D ブレーン」である．ここではその D ブレーンとは何かを見てみよう*4)．

ひもの運動は振動と重心運動である．その振動がどのようなものかを決めるために，ひもの端が

*4） D ブレーンについての様々なトピックは，拙著[4]をご覧いただきたい．

どのように運動するかを指定する必要がある．自由に振動するひもはいわゆる「自由端境界条件」に従っている：

$$\left.\frac{\partial X^i(\sigma,t)}{\partial \sigma}\right|_{\text{端}}=0. \tag{2}$$

ここで σ は，ひもに沿ってひもを座標付けするパラメータである．$X^i(\sigma,t)$ は，ひも上の位置 σ と時刻 t を指定すれば，そのひもが空間のどこに居るかを指定する関数である．i は3次元空間の座標ラベル $i=1,2,3$ をとる．$X^i(\sigma)$ が波動の形の振動をするとき，最もエネルギーの低い振動状態は，ちょうど素粒子で言うところの光子に対応していることが知られている．

一方で，「固定端境界条件」もある：

$$\left.\frac{\partial X^i(\sigma,t)}{\partial t}\right|_{\text{端}}=0. \tag{3}$$

自由端境界条件と比べて，固定端境界条件では微分するものが σ ではなく t となっている．この条件は，ひもの端点が固定されており時間依存しない，ということを意味している．

実は超弦理論では，ある条件が満たされたときには*5)，t と σ を入れ替えてみても，理論全体として物理は変わらないという性質があることが古くから知られている*6)．すなわち，自由端境界条件のひもが許されるなら，固定端境界条件のひもも許されるのである．

固定端境界条件に従うひもは，あたかも，ある部分空間の上にトラップされているようである．運動が制限され，端は部分空間の上しか運動することができない（図1参照）．この部分空間を，Dブレーンと呼ぶ．DはDirichlet（ディリクレ）の頭文字で，固定端境界条件のことをディリクレ型と呼んでいる．Dブレーンは，ひもがくっつく膜である．Dブレーンは様々な次元を持ち得る：点状のDブレーンもあれば，1次元，2次元，多次元にのびる部分空間も定義でき，従って多次元のDブレーンが存在し得る．

*5) ひもの運動する空間が丸く閉じている場合のこと．

*6) このように，理論で不変な性質のことを対称性と呼ぶ．t と σ を入れ替える対称性のことを，T双対性と呼ぶ．

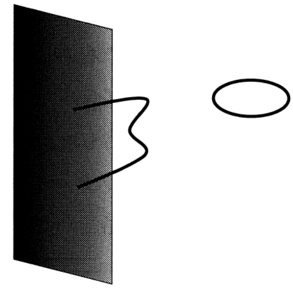


図1 Dブレーンに端を置く開いたひもと，Dブレーンから離れた場所を運動できる閉じたひも．

なぜDブレーンが超弦理論の，ひも以外の主役なのだろうか？ それは，Dブレーンが，ひものように1次元的にのびたものではなく，多次元にのびたものであるから，と言っても良いかもしれない．点粒子をひもに「格上げ」するのであれば，なぜさらに次元の大きい「膜」まで格上げしないのか？ というのは自然な問いである．実は超弦理論では，基本的構成要素をひもであると考えた理論から出発するのであるが，上述のようにDブレーンと呼ばれる多次元膜も自然に登場し，様々な次元の物体が渾然一体となっている理論となっているのである*7)．

超弦理論が実はこのような様々な多次元物体により構成された理論である，ということが判明したのは，1990年代後半である．それ以降，超弦理論の様相はすっかり変わってしまった．ひもだけではなく，様々な次元の様々な形が氾濫する多彩な理論となったのである．その多彩さは，ついにブラックホールの記述へと行き着く．次に，Dブレーンがブラックホールであることの理由を見ていこう．

3. Dブレーンはブラックホール

ブラックホールと言うと，時空の穴，時空の最も不可思議な性質を如実に表す物体，というイメー

*7) ひもとDブレーンを入れ替える対称性も，超弦理論には存在する．

ジがあるが，まずはブラックホールとは何かという問いをよく考えるために，電磁気学とのアナロジー（類似）を見てみることにしよう．

電磁気学には，電場すなわち静電ポテンシャルがあり，そのポテンシャル（電場）の源となる電荷がある．電荷がポテンシャルをつくっており，電荷は，もし電子なら，無限に小さい点電荷である．点電荷の場所では静電ポテンシャルは無限大になり，特異点になっている．ブラックホールも全く同様に考えることができる．重力ポテンシャルを扱う理論が重力理論であり，ポテンシャルの源は質量エネルギーである．点状の質量エネルギー，質点を考えると，それが重力ポテンシャルを生み出す．アインシュタインの重力理論は，電磁気学と違って非線形な運動方程式を持つが，基本的には同じ機構である．質量エネルギーが点になるほど小さいと，点に近ければ近いほど重力ポテンシャルは強く，点上で重力の強さは無限大になる．すなわち，特異点である．重力理論の場合，十分重力ポテンシャルの変化が強くなると，事象の地平面と呼ばれるものが発生し，地平面の特異点側からは光速の運動でも抜け出すことができなくなってしまう．これがブラックホールである．以上のように，運動方程式を解くときの基本に立ち返ると，ブラックホールは，重力の源になっている「点」である．

Dブレーンがブラックホールであるという主張は，この観点を再現することで理解できる．Dブレーンが重力の源なのである．重力を媒介する素粒子は重力子であるが[*8]，ひもの振動モードとして重力子を表すためには，閉じたひもを考えなければならないことが知られている（図1でDブレーンから離れた場所を運動している円のこと）．閉じたひもはDブレーンとは一見関係ない．Dブレーンはひもの端点の情報で定義されるからである．しかし，次のように考えると，Dブレーンは閉じたひもの源になっていることが分かる．

源であるということは，そこから閉じたひもが

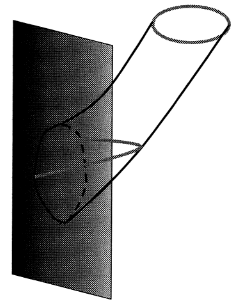


図2　閉じたひもがDブレーンから発生する様子.

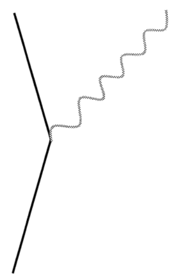


図3　電子（世界線は実線で示されている）から光（波線）が発生するファインマングラフ．図の縦方向が時間軸，横方向が空間軸を表す.

発生できるということである．発生の様子を見るために，ひもが時間空間内を掃く軌跡（世界膜と呼ぶ）を描いてみる．図2は，閉じたひもが発生する様子を表している．Dブレーンが，ひもの端点を載せることができるという定義のために，閉じたひもが発生できることがよくわかる．世界膜の描像からは，端点となり得る＝発生できる＝源，の視点が明らかとなる．この論理は素粒子でも共通である．点粒子が時間空間内を掃く軌跡は世界線と呼ばれ，世界線のつながりを表した図をファインマン図と呼ぶ．図3は，電子から光が放出される様子を表すファインマン図である．光の発生は，電子を表す世界線に光の世界線が端を持っていることで表されている．

Dブレーンが重力の源であることは以上のように理解できるが，それでは，いったいDブレーンをブラックホールと同一視してもよいのだろうか？実のところ，超弦理論はこの問いには満足のいく答えを出していない．Dブレーンは，平坦な空間における部分空間として定義されている一方で，

*8）　電磁気力を媒介する素粒子は光子，すなわち光である．

ブラックホールは曲がった時空を提供している物体であり，それらは全く異なるように見える．Dブレーンの提案者の一人であるJ. Polchinskiは，ある種類のDブレーンの重さとその電荷を超弦理論で計算し，ブラックホールの持つ性質と同じであることを確かめることで，これらが同一のものを表していると主張した．この主張は大変突飛なものではあったが，その後様々な計算が行われ，主張の正当性が確かめられた．その結果の一つとして，ブラックホールのエントロピーの計算が現れたのである．

それでは次に，いよいよDブレーンによるブラックホールの微視的状態数の数え上げについて述べよう．

4. 超弦理論が教えるブラックホールの微視的状態

超弦理論のDブレーンで記述できるブラックホールは，すべてのブラックホールではなく，ある特殊な種類のものに限られる．それは主に「超対称性」と呼ばれる性質を兼ね備えたブラックホールのことなのであるが，本稿ではそこには立ち入らないことにする*9)．以下では，より簡便な理解を与えたC.G. CallanとJ. Maldacenaの与えた例に従って，ブラックホールの微視的状態数を数えてみよう[5)]．

何を数え上げるべきかは，以上の考察から明らかであろう．ある種のブラックホールはDブレーンであり，Dブレーンは開いた弦の端点で定義されるのであるから，ブラックホールの微視的状態は，Dブレーンにくっつく開いた弦の状態で決まる．従って，ブラックホールのエントロピーを計算するには，Dブレーンにくっついた開いた弦の状態数を数え上げれば良いのである．

さて，Dブレーンにくっついたひもとは，開いたひもである．その振動モードの最もエネルギーの低い励起モードは，素粒子で言うと光子のようなものに対応する，と述べた．すなわち，重力理論のブラックホールを特徴づける微視的状態は，実は光子の仲間であった，ということになる．全く異なる自由度に見えるものが実は等価である，というこのような等価原理は，超弦理論が明らかにした新しい原理の一つであり，素粒子論と重力理論の研究の原動力となっている．

どのようなブラックホールがDブレーンときちんと対応を持っているのか？ CallanとMaldacenaが用意した例は，3種類の電荷を持つ，4次元空間（すなわち5次元時空）での，仮想的ブラックホールであった．3種類の電荷をQ_1, Q_5, Nと書くことにする．すると，対応するDブレーンは以下のようなものとなる．超弦理論は，空間9次元すなわち10次元時空で無矛盾であることが知られている．これを5次元時空にするためには，残りの5次元空間が，丸く小さくなっていると考えればよい．この内部5次元空間に，様々な次元のDブレーンを巻き付けることができる．そこで，5次元空間に広がるQ_5枚のDブレーンと1次元空間に広がるQ_1枚のDブレーンを巻き付けてみる（図4）．さらに，これらのDブレーンのそれぞれに端を置くひもが，ある方向にNの運動量で走っているとする．この運動量は，内部空間の方向の運動量なので，開いた5次元時空から見る

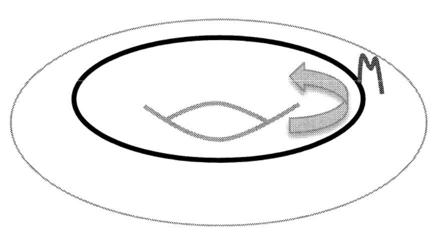


図4　内部5次元空間に巻き付くDブレーンの模式図．ドーナツの表面は，トーラスと呼ばれる5次元内部空間を表している（5次元を図示するのは不可能なので，2次元表面で図示されている）．太い円は，内部空間に巻き付いている，1次元にのびたDブレーン．さらに，ドーナツの表面すべてに巻き付いた，5次元に広がったDブレーンがある．それぞれに端を持つひもが矢印の向きに運動している．

*9)　超弦理論の「超」は，超対称性を意味する．

と，電荷に見える．これが，3 種類の電荷を持つブラックホールに対応する D ブレーンの配置である*10)．

さて，重力理論でこれらの電荷を持つ（超対称）5 次元ブラックホール解を構成し，事象の地平面の面積から，Bekenstein の公式 (1) を用いると，そのブラックホールのエントロピーは

$$S = 2\pi\sqrt{Q_1 Q_5 N} \tag{4}$$

と求まる（ここで，簡単のために，プランク単位系を選んだ．プランク単位系とは，光速 c，重力定数 G，プランク定数 $h/2\pi$，ボルツマン定数 k_B などを 1 とする単位系である）．果たしてこのエントロピーが，微視的状態数の数え上げから導かれるだろうか．

いま，D ブレーンとして異なる次元を持つ 2 種類を導入した．そのそれぞれをつなぐひもに大きな運動量 N を持たせたので，その弦の励起が系を支配している．全体の総和として N という運動量をもつようなひもの状態数は，N が大きいときには

$$d(N) \sim \exp\left[2\pi\sqrt{cN/6}\right] \tag{5}$$

と与えられることが知られている．ここで c は，ひもの種類の数に関わる量である．ひもの端はそれぞれ Q_5 種類，Q_1 種類の D ブレーンに置かれる可能性があるので，そのようなひもは $Q_1 Q_5$ 種類あることになる．このとき $c = 6Q_1 Q_5$ となるので*11)，代入すると，まさに

$$S = \log d(N) \sim 2\pi\sqrt{Q_1 Q_5 N} \tag{6}$$

となり，Bekenstein の公式の結果 (4) を再現している．

D ブレーンは，ブラックホールのエントロピー公式を，その微視的状態の数え上げから，再現したのである．

*10) ここでは詳しくは述べられないが，このように D ブレーンを配置すると，超対称性がブラックホールと合致するため，対応していることが明白となる．

*11) c は，ひもの上の場の理論における中心電荷と呼ばれる量で，ひもの種類を特徴づける量である．

5. さらなる発展へ

以上見てきたように，ブラックホールを超弦理論の D ブレーンと同一視することにより，ブラックホールの微視的状態が判明し，それを数え上げることでブラックホールの統計力学的エントロピーが計算され，結果は Bekenstein のエントロピー公式と一致した．重力と量子力学の両方の極みとも言える，ブラックホールの微視的状態の記述は，超弦理論によって与えられた．特殊な場合にまだ限られているが，それでも，この一歩は非常に大きい．

この Strominger と Vafa の画期的な研究の約 10 年後，D ブレーンとブラックホールエントロピーの研究は，新しい大きな展開を迎える．詳細は次稿の福嶋氏の解説で明らかになるであろう．超弦理論と D ブレーンによるブラックホールエントロピーの計算は，原子核衝突実験で生成された物体が驚くほど低い粘性を持つという実験結果を説明するのである．ここには，ゲージ／重力対応（もしくは AdS/CFT 対応）と呼ばれる超弦理論の対応原理が活躍する．重力と光子（のようなもの）の等価性である．D ブレーンの物理は，重力理論，高次元ブラックホールの物理を超え，大変魅力的な理論的枠組みを提供し続けているのである．

参考文献

1) A. Strominger and C. Vafa, "Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy", *Physics Letters B* **379** (1996), 99–104.
2) J.D. Bekenstein, "Black holes and entropy", *Physical Review D* **7** (1973), 2333–2346.
3) J. Polchinski, "Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges", *Physical Review Letters* **75** (1995), 4724–4727.
4) 橋本幸士『D ブレーン：超弦理論の高次元物体が描く世界像』（東京大学出版会，2006）．
5) C.G. Callan and J. Maldacena, "D-brane approach to black hole quantum mechanics", *Nuclear Physics V* **472** (1996), 591–610.

（はしもと・こうじ，理化学研究所仁科加速器研究センター）

原子核理論と高次元時空

クォーク・グルーオン強相関系の熱力学



福嶋　健二

1. 地上でつくる初期宇宙

現在の宇宙で最も温度の高い物質は，どこにある，どんな状態だろうか？ そもそも「温度」というからには高エネルギーであるだけでなく，熱平衡状態の実現が必要である．すぐに思い浮かぶ高温状態といえば太陽だろう．表面温度は約 6 千 K（K＝ケルビン：絶対温度の単位），中心部付近はさらに高温になる．太陽系の外に目を向ければ太陽より重い恒星があり，その中心部ではより重い原子核へと核融合反応が進む．恒星の質量が十分に大きければ，中心温度は約 100 億 K にまで達し，最後には超新星爆発を起こす．

超新星爆発を凌駕する高温状態が宇宙に存在するだろうか？ 答えはイエス．驚くべきことに，現在の宇宙で最も温度の高い物質は，この地上で人間の手によって生み出されているのである．観測された温度は約 4 兆 K．自然界ではビッグバン直後（$\sim 10^{-6}$ 秒程度といわれている）の初期宇宙のみが経験した温度である．

高温状態を作るためには，なるべく小さな体積に大きなエネルギーを詰め込むことで，より高いエネルギー密度を実現する必要がある．我々の身の回りで最も密度の高い状態は原子核内部である．原子核は陽子と中性子（これらは核子と総称される）の束縛状態であり，重い原子核の中心部分の核子密度は $\rho_0 \simeq 0.17$（核子 /fm^3）で飽和している．この密度を我々に馴染み深い単位に換算すると $\rho_0 \simeq 280$ 兆 g/cm^3 であるから，原子核がいかに高密度物質であるか分かるだろう．

原子核は正電荷を持っているから（従って重イオンという言葉も原子核とほぼ同義に用いられる）電場によって加速することができる．例えばアメリカのブルックヘブン国立研究所（BNL）で 2000 年から稼働を続けている RHIC（Relativistic Heavy Ion Collider）という加速器では，静止質量エネルギーの 100 倍のエネルギーを持つ金原子核ビームが作られている．相対論的力学によれば運動する物体のエネルギーは，

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{1}$$

で与えられるから，$E = 100\,mc^2$ を代入すれば $v/c = 0.99995$ を得る．つまり金原子核は光速の 99.995%の速さにまで加速されている．またスイスとフランスの国境にある欧州原子核研究機構（CERN）では LHC（Large Hardon Collider）と呼ばれる加速器が 2009 年秋に本格的な運転を開始した．すでに RHIC よりも 14 倍も高いエネルギーを持った鉛イオンによる実験データが出ており，今後の成果に大きな期待が寄せられている．

加速器で原子核を加速しても，まだ熱したことにはならない．いわば水を素早く放り投げたようなものである．「水の温度が上昇する」ということは，微視的にみれば「水分子がより激しく乱雑に動き回るようになる」ということである．例えば

水筒を激しく振り続けると，中の水の温度が上昇する．原子核の温度を上げるための原理も，基本的には同じである．水筒を振る代わりに，互いに逆向きに走る2つの原子核を衝突させれば，原子核を構成する核子や，さらにその内部自由度である**クォーク**，**グルーオン**を乱雑に攪拌し，高温状態を作ることができるはずである．つまり**相対論的重イオン衝突実験**を行えばよい．

さて，標準理論ではクォークが物質の基本的構成要素であり，例えば核子（陽子・中性子の総称）は3つのクォークの束縛状態であると考えられている．核子を一つの物性系に喩えれば，クォークは電子のようなもの，グルーオンは光子あるいは格子振動のようなもの，と見做すこともできるだろう．ところがクォークには不思議な性質がある．原子核を構成する核子は，単独でも存在できる．実際，水素原子核は単独の陽子である．一方，クォークは核子の構成要素だが，未だ嘗てクォーク単独での存在を確認されたことはない（クォークが核子中に存在する証拠は散乱実験から得られている）．つまりクォークは核子中に**閉じ込め**られているわけである．あるいは，クォークは強力な“糊”で互いにくっついている，ともいえる．この“糊”の役割を果たすのがグルーオン（英語の glue= 糊が語源）である．

クォークとグルーオンの量子理論は30年以上前に完成し，今日では一般に**量子色力学**あるいは英語の頭文字をとって**QCD**と呼ばれている．長い歴史にもかかわらずQCDは汲み尽くせぬ物理の泉のような理論である．多岐にわたるQCD研究の中でも，常に弛まぬ発展を遂げてきたのは**摂動的QCD**と**格子QCDシミュレーション**の研究であろう．見方を変えれば，これらの理論の発展が相対論的重イオン衝突実験の実現を牽引し，そして遂に実現した相対論的重イオン衝突実験で得られたデータがQCD理論研究の更なる発展を促している，ともいえる．そうした理論・実験の健全なフィードバックの中で最近注目されている新しい可能性が，本稿の主題である高次元ブラックホールによるアプローチなのである．

2. クォーク・グルーオン・プラズマ

QCDの最も重要な性質の一つが**漸近的自由性**である．クォークやグルーオンは，グルーオンを交換することで強い引力を受けており，交換されるグルーオンの持つ運動量が大きくなると結合定数が小さくなる．平たくいえば，より高エネルギーでは“糊”が弱くなる．従って温度が十分に高ければ，核子に閉じ込められたクォークやグルーオンが核子から融け出す**非閉じ込め相転移**が起こると期待される（図1参照）．このように非閉じ込められたクォークとグルーオンのガス状物質のことを**クォーク・グルーオン・プラズマ**（あるいは略して**QGP**）と呼ぶ．非閉じ込め相転移の起こる温度（転移温度 T_c）は，20年以上前から格子QCDシミュレーションによって調べられており，最近の計算結果では約1.7兆Kであることが分かっている．相転移点よりも高温側のQGPの性質は，漸近的自由性により弱結合理論になっているはずだから，摂動的QCD計算によって詳しく調べることができる．実際，T_c の数倍程度の高温状態では，エントロピー密度，圧力，エネルギー密度などの熱力学量に対して，摂動計算と格子QCD計算の結果は理論誤差の範囲内で一致する．

歴史的には，このような理論的裏付けの下にQGP探索実験が推し進められた．RHIC以前にも様々な試みがなされたのだが，遂にRHICに至ってQGP生成の確証が得られたのであった．そして2005年4月18日，RHICを擁するBNLは一つのプレスリリースを発表した[1]．そのタイトル

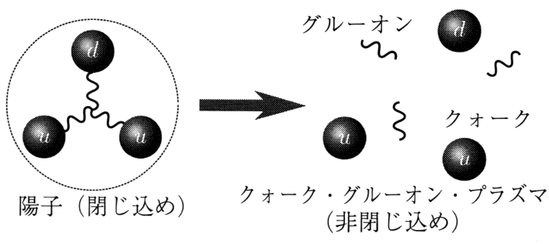


図1　(左) 核子中には u クォークと d クォークが閉じ込められている．(右) 高温ではクォークとグルーオンが融け出し，QGPとなる．

にいわく「RHIC Scientists Serve Up “Perfect” Liquid」日本でも新聞報道されたので，科学に関心の深い方なら「完全流体」というキーワードを聞いてピンとくるかも知れない．まずプレスリリースでは「they’ve created a new state of hot, dense matter out of quarks and gluons（クォークとグルーオンから成る高温・高密度の新しい物質状態を創りだした）」とQGP生成を宣言している．驚くべきはこの後である．「（前略）...the emerging connection between the collider’s results and calculations using the method of string theory, an approach that attempts to explain fundamental properties of the universe using 10 dimensions instead of the usual three spatial dimensions plus time」つまり10次元のスーパーストリング理論による計算と，RHICの衝突実験結果との間に，何らかの接点があるというのである．この発表は世界中の高エネルギー原子核研究者たちを震撼させた．私は2005年4月にマサチューセッツ工科大学（MIT）からBNLに異動したから，ちょうど話題の中心地に赴任したばかりだった．MITで一緒に仕事をしていた研究者と電話で議論していたときに，ところでBNLでトンデモナイ発表があったが，あれは一体何なんだ？ と質問されたことを鮮明に思い出す．実のところBNLの理論研究者たちの多くも当初は否定的な反応を示した．今思えばこのプレスリリースがRHICの物理の方向性に決定的影響をもたらした．電話越しに質問してきたMITの教授も，その後しばらくストリング理論を使って仕事をしていたし，アレルギーともいえるほど否定的だったBNLの高名な理論研究者も，プレスリリースから4年後，遂にストリング理論を使った論文を書いた．とうとう彼も陥落したか，と仲間内ではちょっとしたニュースになったものである．

3. ずれ粘性係数の問題

プレスリリースの主張の根拠は，流体模型計算の成功だった．熱平衡状態にある物質の時空発展は流体方程式に従う．このような仮定の下で計算された楕円型フローという物理量が，見事に実験データを再現したのである．この理論計算の成功は，熱平衡状態の実現を強く示唆している．しかし話はそれだけではない．高エネルギー状態を記述するのだから当然，相対論的流体力学を用いねばならないが，実は相対論的な枠組みで摩擦の効果を入れるのは大変難しいのである．より正確にいえば**粘性**を含む項を取り入れた相対論的流体力学は，様々な定式化の方法があるのだが，まだ完全な理論が確立していない．現在は事情が異なるが，少なくとも2005年当時は粘性項を無視する近似が普通に行われていた．粘性にはいくつか種類があるが，以下ではずれ粘性 η のみ考える．

近似あるいは簡単化のために $\eta=0$ とした理論計算が実験データを再現したことから，逆に，$\eta\simeq 0$ こそがQGPの性質だ，つまりQGPは完全流体だ，とプレスリリースは主張する（対偶になっていないから，$\eta\neq 0$ では実験データを再現できないことを確認しないと本当は何も主張できないのだが）．

さて摂動的QCD計算によれば[2)]

$$\frac{\eta}{s}\approx\frac{C}{g^4\ln g^{-1}} \tag{2}$$

である．ここで s はエントロピー密度，g はQCDの結合定数を表す．C は励起粒子の種類の数に依存した定数である．エントロピー密度で割っているのは，この無次元の組合せが流体方程式の時間発展に効いてくるためである．

ここで重要なポイントは，結合定数が小さくなればなるほど η/s が大きくなる点である．逆に見れば，弱く相互作用している気体ほど“べたべた”している，ということになる．直感に反すると思うかも知れないが，それは直感が液体の粘性に根差しているためである．（希薄）気体では状況が異なる．Maxwellが気体分子運動論で定式化したように，気体中で力を伝えるのは粒子の輸送である．もしも相互作用が非常に強いとすると，粒子がすぐに散乱されてしまって力を遠くまで伝えられない．従って，せん断速度が，せん断応力として伝

わらないので，ずれ粘性は小さい．従って η は粒子の密度 n，平均運動量 $\bar{p}$，そして平均自由行程 λ に比例する．つまり，

$$\eta \approx \frac{1}{3} n\bar{p}\lambda \tag{3}$$

を得る．エントロピー密度 s は粒子密度に比例するから，Boltzmann 定数 k_B を用いて $s \propto k_B n$ である．ということは $(\eta/s) \sim \bar{p}\lambda/k_B$ となる．

式 (2) で単純に $g \to \infty$ とすれば $\eta/s \to 0$ であるが，この結論は正しくない．量子力学の不確定性原理によれば粒子の運動量と位置を同時に固定することはできない．つまり式 (3) で $\bar{p}=0$ または $\lambda=0$ には原理的にできず，必ず $\bar{p}\lambda \geq \hbar$ となる．これより η/s の下限が存在する[3]．すなわち

$$\frac{\eta}{s} \sim \frac{\bar{p}\lambda}{k_B} \geq \frac{\hbar}{k_B}. \tag{4}$$

実際，以下に説明するように，高次元時空との双対性を利用した強結合極限での計算結果は[4]，

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\hbar}{4\pi k_B} \approx 0.08 \frac{\hbar}{k_B} \tag{5}$$

であった．これが場の量子論で許され得る最小値であろうといわれている．そして RHIC のデータは QGP の η/s がこの最小値（に近い値）になっていることを示唆しているのである．つまり QGP は弱結合のガス状物質ではなく，強結合系あるいは強相関系だったのである．

4. ホログラフィック原理

高次元時空からのアプローチは，より俯瞰すれば，**ホログラフィック原理**の応用例であるといえる．これは現代物理学の大きな指導原理の一つであり，量子力学の不確定性原理に匹敵すると考える人もいる．読者の皆さんはホログラムを見たことがあるだろうか？ 科学博物館や最近ではアートとしても展示されている．

今日知られているような形でホログラフィック原理を提唱した一人が 't Hooft であった．彼のアイデアはまるで SF のようである．我々は 3 次元空間に住んでいると思っているが，実はその 3 次元

情報はブラックホール表面の2次元面にマップできるのではないだろうか．'t Hooft の言葉をそのまま引用すれば「We suspect that there simply are not more degrees of freedom to talk about than the ones one can draw on a surface（中略）The situation can be compared with a hologram of a three dimensional image on a two-dimensional surface.」つまり SF 風にいえば，我々の存在はブラックホール表面のホログラムの再生映像だ，と解釈できるだろう．

't Hooft の議論を少し簡略化して紹介しよう[5]．体積 V の箱にエネルギー E のガスが詰まっていて，この状態はブラックホールではないと仮定する．すると Stefan–Boltzmann の法則によって

$$E = C_1 V T^4 \tag{6}$$

と書ける．C_1 は適当な定数である．エントロピーも同様に

$$S = C_2 V T^3 \tag{7}$$

で与えられる．ブラックホールではないという条件から，Schwarzschild 半径 $= 2E$*1) は，体積 V から決まる半径よりも小さくなければならない．すなわち

$$2E < \left(\frac{V}{\frac{4}{3}\pi}\right)^{1/3} \tag{8}$$

である．この式に式 (6) を代入すれば温度 T に対する条件が得られるので，それを式 (7) に代入すれば結局

$$S < C_3 V^{1/2} \propto \mathcal{A}^{3/4} \tag{9}$$

となる．ここで C_3 は C_1 と C_2 の適当な組合せであり，$\mathcal{A}$ は表面積である．一方でブラックホールの Bekenstein エントロピーは，G を重力定数として，

$$S = \frac{\mathcal{A} k_{\mathrm{B}} c^3}{4\hbar G} \tag{10}$$

であることが知られている．このようにブラックホール・エントロピーは面積 $\mathcal{A}$ に比例しているから，もしも $\mathcal{A}$ が十分に大きければ箱の中のエントロピーは同じサイズのブラックホール・エントロピーよりも小さい．エントロピーは熱的・量子的状態数に対応するので，情報量と解釈することもできる．すると箱の中の情報量の最大値は，箱の体積（3次元）に比例するのではなく，表面積（2次元）以下に押さえられていると結論できる．

このようなアイデアは大変魅力的だが，ブラックホールの量子論による正当化は困難である．巨視的な Bekenstein エントロピーが本当にブラックホールの状態数（情報量）と解釈できるのかどうかも定かではない．ひとたび物質がブラックホールに飲み込まれたら我々が観測できるのは最早 Hawking 温度だけであって，飲み込まれた物質の情報は失われた（あるいは別の時空に吸い込まれた）とする見方もある．

その後，'t Hooft のアイデアは，意外な形で具体化された．我々はホログラムの映像なのではなく，我々の住んでいる世界そのものが高次元時空を投影したホログラムなのだ，という考えである．ブレイン宇宙論に似ているが，単に我々の世界が高次元時空に埋め込まれているだけでなく，“ホログラム”であるところがポイントである．

それでは我々の住む，時間1次元，空間3次元の **Minkowski 時空**を“表面”に持つような高次元時空はどのようなものだろうか．詳しい説明は省略するが，6次元時空間の双曲面上に適当に座標をとって5次元曲面を作ると，計量が

$$ds^2 = R^2\left(u^2(-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{du^2}{u^2}\right) \tag{11}$$

で与えられる空間を考えることができる．ここで R は双曲面の大きさ（曲率半径）であり，u が5次元方向への座標変数である．この形から $u \to \infty$ の“表面”（紫外領域と呼ばれる）が t と $\vec{x}$ で張られる Minkowski 時空になっていることが分かるだろう．$z = 1/u$ と変数変換した次の形，

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}\left(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2\right) \tag{12}$$

*1) 高エネルギー物理学分野では，しばしば，光速や Planck 定数を $c = \hbar = 1$ にとる自然単位系を用いる．

もよく使われる．このような計量で表される時空を一般に **Anti de Sitter（AdS）空間**という．超重力理論以前には，4次元の AdS_4 空間は，真空のエネルギー密度が負である上に，時間方向が周期的になってしまい（周期性を除くことはできるが境界条件が必要になる），物理的にあまり注目されることはなかった．

この AdS 空間における高次元重力理論と，その境界における4次元の場の理論が，双対関係にあると看破したのが Maldacena の慧眼であった．実際，超重力理論（IIB 型）の古典解は90年代初頭から知られており

$$ds^2 = H^{-1/2}(r)\Big(-f(r)dt^2 + d\vec{x}^2\Big) + H^{1/2}(r)\Big(f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega_5^2\Big) \quad (13)$$

で与えられる．ここで $H(r) = 1 + R^4/r^4$, $f(r) = 1 - r_0^4/r^4$ である．さらに $r_0 \to 0$ の極限をとったものを extremal な解と呼び，謂わばブラックホールの"基底状態"に相当する．一方，ゼロでない $r_0(\ll R)$ を持つ解を near-extremal と形容する．さて，extremal な解では $f(r) = 1$ であり，さらに $r \to 0$ という near-horizon 極限をとると，$H(r) \approx R^2/r^2$ と近似できる．ここで $z = R^2/r$ と変数変換すれば，結局，

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}\Big(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2\Big) + R^2 d\Omega_5^2 \quad (14)$$

となることから，near-horizon 極限における時空は5次元 AdS_5 と5次元球面 S_5 との直積空間となっていることが分かる．以下ではしばしば S_5 部分を省略して計量を書く．

5. 高次元アプローチによる相対論的重イオン衝突実験の物理

QGP への応用を考えるためには，ここまでの準備ではまだ不十分である．計量 (14) に QGP の情報が全く含まれていないからである．QGP 物理を扱う処方箋は Klebanov らによって与えられた[6)]．実は QGP 物理にとっては near-extremal な解が最も重要なのである．それは当然で，extremal な解は基底状態だから，空っぽの状態に対応する．$r_0 \neq 0$ のとき $f^{-1}(r)$ は $r = r_0$ で発散する．この計量は AdS_5 中の Schwarzschild ブラックホールになっている．つまり $z = R^2/r$ を使えば

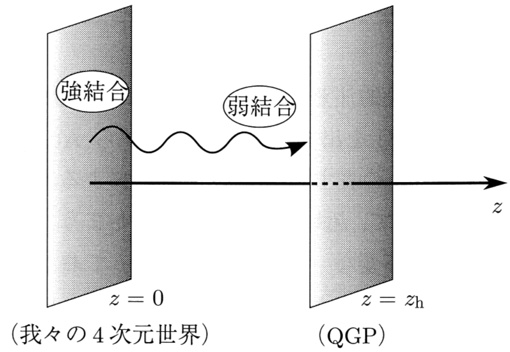


図2　高次元時空から見た QGP.

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}\Big(-f(z)dt^2 + d\vec{x}^2 + f^{-1}(z)dz^2\Big). \quad (15)$$

ここで $f(z) = 1 - z^4/z_\mathrm{h}^4$ であり，$z_\mathrm{h} = R^2/r_0$ がブラックホールの Schwarzschild 半径（事象の地平線の位置）である．4次元時空のブラックホールは地平線が3次元球状に広がるが，AdS_5 ブラックホールの地平線は4次元全体に広がっているので，"ホール"という言葉を嫌ってブラックブレインなどと呼ぶ人もいる（図2参照）．

詳述は控えるが，温度 T の Boltzmann 因子 $e^{-H/T}$（H は Hamiltonian を表す）を時間発展演算子と見做すと，T を虚時間方向の周期の逆数だと考えることができる．計量 (15) を適当に変数変換すれば，t 方向を極座標の角度変数のように書き直すことができて，その周期から温度が

$$T = \frac{1}{\pi z_\mathrm{h}} \quad (16)$$

と決まる．これは AdS_5 ブラックホールの Hawking 温度であると同時に，4次元世界の QGP 温度にも対応する．例えばクォーク非閉じ込めは，$z = 0$ 上のクォーク場に対応する境界から伸びるストリングが，$z = z_\mathrm{h}$ の地平線にべったり張り付くことで実現される．温度が高くなればなるほど

$z_{\rm h}$ が小さくなるので，高温では非閉じ込め状態になりやすい．

ここで一般的注意であるが，我々は超重力理論の古典解 (13) を出発点にした．だから $\rm AdS_5$ ブラックホールの表す QGP は，QCD による本物の QGP と違って，超対称粒子を含んでしまう．さらにスケール不変な（共形）理論となっており，そもそも閉じ込め相が存在しない．このように高次元アプローチでは一般に QCD と異なる理論を扱うことになるため，計算結果を批判的に考察することを常に忘れてはいけない．

以下で，ずれ粘性係数の計算の概要を見てみよう．すでに見たようにブラックホールの Bekenstein エントロピーは $S = \mathcal{A}/4G$（自然単位系）であったから，これを QGP の熱的エントロピーと同定しよう．一方，ずれ粘性係数 η は場の理論ではストレステンソルの相関関数で与えられ，この相関関数を高次元の言葉に書き換えると，$\rm AdS_5$ ブラックホールに重力子が吸い込まれる断面積 $\sigma_{\rm abs}$ と関係付けられる．つまり

$$\frac{\sigma_{\rm abs}(\omega)}{V} = 16\pi G \int d^4x\ \frac{e^{i\omega t}}{2\omega} \langle [T_{xy}(x), T_{xy}(0)] \rangle \tag{17}$$

である．この断面積は低エネルギーではブラックホールの面積に等しく，$\sigma_{\rm abs}(\omega \approx 0) = \mathcal{A}$ で与えられる．以上をまとめて

$$\frac{\eta}{s} = \frac{\sigma_{\rm abs}(0)/16\pi GV}{(\mathcal{A}/4G)/V} = \frac{\hbar}{4\pi k_{\rm B}} \tag{18}$$

が結論される．

このように高次元で計算が簡単になるのは，量子的補正を考えず古典解だけ扱っているからである．つまり重力側は弱結合極限の古典近似をしている．このような扱いは 4 次元の場の理論側で見れば，カラー自由度が無限大（$N_{\rm c} \to \infty$）で，強結合極限（$g^2 N_{\rm c} \to \infty$）であるときに正当化できる．つまり式 (18) は 4 次元の（QCD に似て非なる）ゲージ理論の強結合極限における答なのである．

高次元アプローチは，QGP 物理に限定しても，すでに様々な物理量に応用され，一定の成功を収めている．最後に，相対論的重イオン衝突の時空発展のすべてをホログラフィックに記述しよう，という最近の野心的な試みを紹介して，本稿を締め括ることにしよう．RHIC のプレスリリースには，ずれ粘性の他に，もう一つ重要な問題が提起されている．それは熱化時間（熱平衡状態が実現する時間）である．流体模型の解析によって知られている熱化時間は，ほとんど QCD の相互作用の時間スケール（$10^{-24} \sim 10^{-23}$ 秒）であり異常に早い．微視的な熱化過程はまだ解明されていない部分が多く，ずれ粘性よりも理解がずっと遅れている．理論的に，大変深刻な事態である．

そこで威力を発揮するのが高次元アプローチである．詳細は省くが[7]，5 次元の計量を Fefferman–Graham 系と呼ばれる特殊な座標系で書き直せば，4 次元時空のストレステンソルを求めることができ，それによって相対論的重イオン衝突後のエネルギー密度 ε，圧力 p の時空発展を決定することができる．具体的には，衝突する原子核に対応するショック平面波を導入し，5 次元の Einstein 方程式を解く．得られた計量は（固有）時間 τ の関数となっており，これより $\varepsilon(\tau), p(\tau)$ が求められるのである．

衝突から十分に時間が経った後の時空発展は解析的に扱うことができる．QGP は時間とともに冷えてゆくので $\varepsilon(\tau)$ も $p(\tau)$ も τ の単調減少関数である．つまり高次元では QGP に対応する地平線 $z_{\rm h}$ が，時間とともに我々の世界（$z = 0$）から遠ざかってゆく．驚くべきことに $\varepsilon(\tau)$ や $p(\tau)$ を $\tau^{-\alpha}$ と仮定したときの冪 α が，5 次元曲率が発散しない等の特異点を回避する条件から一意に定まってしまう．さらに驚くべきことには，このように代数的に得られた α が，理想流体方程式から求められる値と一致する！

これだけでも理論的に興味深いが，本当に知りたいのは熱化前の状況，つまり流体方程式が使えない衝突直後の時空発展である．Kovchegov による先駆的な研究もあるが，最近，Chesler と Yaffe が大変美しい数値計算の結果を出した[8]．衝突前後のエネルギー密度分布が時空発展し，系が熱化

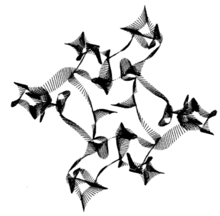
する様子が，まるで手に取るように見える．現在，QGP 熱化の問題に興味を持つ研究者の多くが，高次元アプローチから学び取るべき物理的内容を吟味している．QGP/QCD 物理の一番の強みは，摂動的 QCD や格子 QCD シミュレーションなど，理論の揺るぎない土台がある一方で，必ずしもそれらに縛られることなく，多くの研究者たちが常に新しい手法を模索し続けていることである．また逆にいえば，面白い可能性を容易に受け容れる代わりに，面白いからといって過信しない．こうした真摯な姿勢が QGP 物理を健全に発展させてきた原動力であろうし，それは LHC の時代でも変わらず続いていくことだろう．

参考文献

1) プレスリリースの原文は BNL のホームページ：`http://www.bnl.gov/`から読むことができる．
2) P.B. Arnold, G. DMoore, L.G. Yaffe, "Transport coefficients in high temperature gauge theories. 2. Beyond leading log", *JHEP* **0305**, 051 (2003).
3) P. Kovtun, D.T. Son, A.O. Starinets, "Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics", *Phys. Rev. Lett.* **94**, 111601 (2005).
4) G. Policastro, D.T. Son, A.O. Starinets, "The Shear viscosity of strongly coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 081601 (2001).
5) G. 't Hooft, "Dimensional reduction in quantum gravity", arXiv:gr-qc/9310026.
6) Klebanov による以下のレヴューが読みやすい．I.R. Klebanov, "TASI lectures: Introduction to the AdS / CFT correspondence", arXiv:hep-th/0009139.
7) 詳しくは以下のレクチャーが初学者向けで分かりやすい．R. Peschanski, "Introduction to String Theory and Gauge/Gravity duality for students in QCD and QGP phenomenology", *Acta Phys. Polon.* **B39**, 2479–2510 (2008).
8) P.M. Chesler, L.G. Yaffe, "Horizon formation and far-from-equilibrium isotropization in supersymmetric Yang-Mills plasma", *Phys. Rev. Lett.* **102**, 211601 (2009); "Holography and colliding gravitational shock waves in asymptotically AdS_5 spacetime", *Phys. Rev. Lett.* **106**, 021601 (2011).

（ふくしま・けんじ，慶応義塾大学理工学部）

高次元ブラックホールとLHC実験



駒宮 幸男

高次元の理論は魅力的である．我々の住んでいる空間3次元・時間1次元の時空に加えて，我々には見えない**余剰次元**の空間があり，各素粒子の固有な性質を象徴する内部量子数をこれらの余剰次元空間の幾何学構造で説明できれば，これは明らかにパラダイムの転換である．中でも超弦理論では，ゲージ相互作用が余剰次元空間の曲がりに関連して自然に解釈でき，一般相対論で4次元時空の曲がりと解釈される重力をも含むすべての相互作用の統一への期待がかかっている．最近の弦理論は行き詰まったのか，応用への傍流が大河になってしまった気がする．また，ジュネーブにある素粒子物理研究所 CERN の世界最高エネルギー**陽子・陽子衝突加速器 LHC** での高次元ブラックホール生成の可能性は，サイエンスリテラシーの欠如したマスコミのセンセーショナリズムに乗って必要以上に騒がれてきた．もっと筋の良い，素粒子の質量の起源であるヒッグス粒子とか，超対称性粒子群などの重要な新粒子の発見が迫っているかもしれないのに．

1998 年春ごろ Arkani-Hamed, Dimopoulos, Dvali が，「なぜプランクスケールと電弱相互作用のエネルギースケールに 16 桁以上の開きがあるのか」という**階層性問題**に対して，大きなサイズの余剰次元があるとこの階層性問題を解決できる，と豪語する論文を書いた．特に余剰次元数が 2のときには，そのコンパクト化されたサイズがサブミリメートルになるということで，短距離で重力を測定する実験が流行した．但しこの主張は，プランク長に比べて非常に大きなサイズの余剰次元を仮定するという「新たな階層性問題」を生むので，うまく問題をすり換えたに過ぎない．彼らの動向に注意していると7月には，加速器実験で余剰次元の効果が発見できるかも，という論文が出た．当時私は最高エネルギーの**電子・陽電子衝突型加速器 LEP** で実験していたが，直ちに余剰次元の探索チームを立ち上げて LEP のデータを解析した．インチキな理論だとは思っても探してしまうのが実験家の性である．例えば，電子と陽電子が衝突し光子と重力子が生成されるプロセス $e^+e^- \to \gamma G$ は標準理論では殆ど起こらない．しかし，この余剰次元の理論では重力子は余剰次元にも運動量を持ち，それが我々の時空では質量として見える．この重力子 G_n は，大きなサイズの余剰次元を仮定すると非常に多くの運動量状態をとり，従って我々の時空においては質量レベルが稠密に分布して重力子の種類が圧倒的に増えているように見えるので，$e^+e^- \to \gamma G_n$ の反応が電弱相互作用の反応と同じオーダーの頻度で生ずる可能性がある．この反応の終状態において，G_n は測定器をすり抜けるので，観測されるのは光子が唯一つだけでそのエネルギーは反対に生じた G_n

の質量によって変化する．これらの G_n 直接生成反応とは別に，電子・陽電子対消滅で G_n を通して，重力子に結合する如何なる粒子もエネルギー・運動量や電荷などさえ保存すれば生成できるので $(e^+e^- \to G_n^* \to \text{anything})$，様々な終状態において標準理論過程との干渉による角度分布のずれを探した．しかし，すべての事象や現象は標準理論の予言で説明がつき「一攫千金」は儚い夢に終わり，探索はTEVATRONやLHCに引き継がれている．

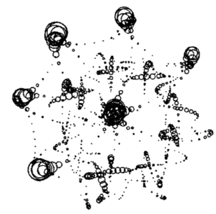
この頃，大きな空間サイズを持つ余剰次元の理論では，高エネルギーの粒子衝突において高次元ブラックホールが生成されるという論文が出てきた．シュワルツシルト半径よりも小さい粒子は古典的にはブラックホールである．しかし，量子力学では，粒子の波動の空間的広がりの目安であるコンプトン波長にくらべてシュワルツシルト半径が大きいときのみ粒子はブラックホールとなり，これは4次元時空では粒子の質量がプランク質量よりも大きいことになる．同様に，大きなサイズの余剰次元における「プランク質量」を1 TeVと仮定すると，ブラックホール質量は1 TeVよりは大きいが4次元時空でのプランク質量に比べて格段小さくてよい．余剰次元でのブラックホールのシュワルツシルト半径 r_S はコンプトン波長より大きいので，生成断面積 $(\sim \pi r_S^2)$ は大きい．たとえブラックホールが生成されても，圧倒的に種類の多い重力子 G_n に崩壊し，G_n は何の痕跡も残さずに測定器を通り抜けるので，崩壊は観測にかからないだろうと考えた．しかし，我々が住んでいるブレインに標準理論の粒子は住んでおり，このブレイン近傍でブラックホールは崩壊するので，多数の G_n に崩壊するのではなく，主に標準理論の粒子に崩壊すると主張する論文が出た．これが本当ならば，LHCで生成できれば発見は容易である．

LHCでブラックホールができると，地球まで飲み込んでしまう危険性があるのではないか．科学者はこのような危険があることを秘密にして，単(ひとえ)に知的欲望に駆られてLHCを建設してしまったのではないか．2008年にLHCが事故を起こして稼動が遅れたのは，「創造主」がその危険性を知っているからでLHCは永遠に稼働しないだろう．というようなあらぬ噂が世界中に飛び交い，おまけに，加速器で生成されたブラックホールが肥大化していって地球が飲み込まれる動画まで配信された．CERNもこれらの反科学的なナンセンスを放置することができず，理論部の著名なJ. Ellisなどが中心となってLHCは安全であるという論文を2003年に投稿し2008年にアップデートした．ここでの議論は，宇宙線の高エネルギー陽子と大気の窒素や酸素などの原子核を形成する陽子との衝突は，LHCでの陽子・陽子衝突よりも重心系のエネルギーが高い反応も含まれており，もしLHCでブラックホールなどの危ない粒子が生成され地球を飲み込むようなことがあれば，既にそのようなことが宇宙のいたるところで起きていることが反応断面積などの計算から明らかである，というものである．

LHCは2010年3月から衝突エネルギー7 TeVで運転されている．LHCの**ATLAS**や**CMS**実験に参加する物理学者は数千人もいるので，このうちのマニヤックな何人かが高次元ブラックホールをまじめに探索していても不思議ではない．ATLAS実験では多数の高エネルギージェット（粒子の束）が生成される事象を探索したが標準理論の予言からの超過はなかったそうだ．あるモデルを仮定すると，余剰次元でのプランクスケールを1 TeVと仮定し，余剰次元数が2～6ならば，4 TeV程度より軽いブラックホールの存在は棄却された．ただし，崩壊モードや崩壊で生成された粒子の分布はモデルに依存する．高次元ブラックホールの探索でそれ自体を発見できなくとも，理論家が予想だにしなかった新しい素粒子反応で生じたブラックホールに似た事象が発見され，全く新しい世界が開けないとも限らない．実験はやってみなければわからない．

（こまみや・さちお，東京大学大学院理学系研究科）

エンタングルメントとブラックホール熱力学



畔柳　竜生

1. 超弦理論研究者の『実験室』

現在世界中の素粒子論の研究者たちは，アインシュタインが20世紀に夢見た統一場理論の現代版とでもいうべき理論的枠組みの実現に向けて，様々な観点から研究を進めています．中でも超弦理論は多くの研究者たちの興味の対象であり，素粒子の世界における重力を含めた4つの基本的相互作用を統一的に記述すると期待されています．しかし，超弦理論は未解明の部分が多く，理論と呼べるほど成熟しているかさえ定かでない，と主張する研究者もいます．

さらに，量子重力を含むことからもわかるように，超弦理論を特徴づける物理的なスケールは，実験的に詳細に調べられている電弱スケール等と比べて，桁外れに高エネルギーであり，実験や観測によってこの理論の検証をすることは容易ではありません．もちろん，超弦理論に特徴的な性質に着目し，それをどうにか観測しようという提案は既に色々とあります．しかし，超弦理論は未完成なわけですから，理論自体の整備を進めていくことこそが最優先事項です．

そのために有用な方向性の一つが，超弦理論に登場する物理的対象を理解していく過程を通じて，理論そのものの構造をより明確に把握していくことです．橋本氏による解説にもあるように，中でも歴史的に最も重要な役割を果たしてきたのがDブレーンであり，その束縛状態として構成されるブラックホールです．

ブラックホールに関しては，前田氏の解説にあるように，1975年にホーキングが重力の半古典論を用いて**ホーキング輻射**の存在を指摘したことにより，その熱力学的性質の全貌が明らかになりました．特に，ブラックホールのエントロピーはベッケンスタイン・ホーキング公式

$$S_{\rm BH}=\frac{A_{\rm H}k_{\rm B}c^3}{4G_{\rm N}\hbar} \tag{1}$$

($k_{\rm B}$: ボルツマン定数，$G_{\rm N}$: ニュートン定数，c: 光速，$\hbar$: プランク定数）によって，事象の地平面の面積 $A_{\rm H}$ に比例する形で与えられることが判明しました[1)]．

しかし，半古典論ではブラックホールのエントロピーの微視的起源を理解することは不可能です．そこで，1996年にストロミンジャーとヴァッファは超弦理論を用いることで，理論の超対称性を部分的に保つブラックホールのエントロピーを微視的に導出しました[2)]．この研究成果は超弦理論の20年以上の歴史の中で最も大きな成果の一つであり，そこから物理的，数学的に重要な様々な研究が派生し，超弦理論の新たな側面が次々と明らかになっていきました．

歴史が物語るように，ブラックホールは量子重力を研究する者にとって，いわば実験室のようなものです．つまり，ブラックホールが示す様々な不思議な振舞いを理解していくことは，量子重力の本質を捉える上で極めて重要な思考実験なのです．

この記事では，上記のような観点から非常に興味深い，エンタングルメント（量子的もつれ）に関係したブラックホールの物理，特に情報喪失問題，および，ブラックホールのエントロピーとエンタングルメントエントロピーとの関係について，近年の研究成果を交えて紹介したいと思います．

2. ブラックホールの情報喪失問題

ブラックホールを半古典的に取り扱うと，つまり，古典的なブラックホール上を運動する物質場の量子論を展開すると，ブラックホールに関連した物理現象が古典的に取り扱われた場合よりも格段に豊かであることがわかります．その中でも最も興味深いのがホーキング輻射と呼ばれるブラックホールから放出される熱的な輻射で，その効果によってブラックホールは古典的に取り扱われた場合とは全く違う様相を呈します．

しかし，それは同時に**ブラックホールの情報喪失問題**と呼ばれる由々しき問題を生み出すことになります．この問題を簡単に説明するため，ここでは球対称な星が重力崩壊を起こし，シュワルツシルトブラックホールが形成されたのち，ホーキング輻射によって蒸発する過程を考えます．この過程に対応するペンローズ図は図 1 で与えられます．

通常，量子論を考えた場合，系全体の時間発展はユニタリー演算子の作用によって記述されるため，時間発展の前後で情報は保存します．つまり，ブラックホール形成以前，物質場が純粋状態 $|\Psi\rangle$ によって記述されるとすると，時間発展の後も純粋状態に留まると期待されるわけです．具体的にブラックホール形成前の純粋状態を考えたければ，空間的超曲面 C1 に着目して状態を構成すれば良いです．この場合，密度演算子 ρ は

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| \tag{2}$$

で与えられるため，量子的なもつれ具合を計る指標である**エンタングルトメントエントロピー** S_{EE} は，その定義により，

$$S_{\mathrm{EE}} = -k_{\mathrm{B}} Tr_{H1} \rho \log \rho = 0 \tag{3}$$

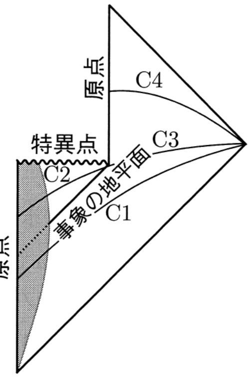


図 1　シュワルツシルトブラックホールの形成・蒸発過程に対応するペンローズ図．灰色の領域は星を表しています．

（ここで Tr_{H1} は C1 に対応するヒルベルト空間におけるトレース）とゼロになります．

しかし，ひとたびブラックホールの事象の地平面が形成されると，状態を構成するためには事象の地平面の内側に存在する超曲面 C2 と外側に存在する超曲面 C3 の両方を考慮する必要があり，全ヒルベルト空間はそれら 2 つの空間的超曲面に対応するヒルベルト空間のテンソル積として与えられます．

いま，無限遠方に静止している観測者を考えると，この観測者には事象の地平面よりも内側に関する情報を知る術はありません．そのため，事象の地平面よりも外側の物質場と内側の物質場の間の量子的もつれ具合を計る指標であるエンタングルメントエントロピーは有限の値を返します．つまり，全ヒルベルト空間上で定義された密度演算子を考え，事象の地平面より内側に対応するヒルベルト空間に属する状態の部分をトレースアウトします．すると，縮約された密度演算子 ρ_3 が得られ，対応するエンタングルメントエントロピーは

$$S_{\mathrm{EE}} = -k_{\mathrm{B}} Tr_{H_3} \rho_3 \log \rho_3 \tag{4}$$

（ここで Tr_{H_3} は C3 に対応するヒルベルト空間におけるトレース）で与えられます．これは一般にノンゼロです．また，このエンタングルメントエントロピーがブラックホールの事象の地平面の面積に比例することを支持する種々の計算が知られ

ているため[3]，ブラックホールのエントロピーをエンタングルメントエントロピーと関連づけて理解できるのではないか，と期待されています．

さらに面白いのはブラックホールがホーキング輻射によって蒸発する過程です．ホーキング輻射をすることで，次第にブラックホールは小さくなり，最終的には蒸発してなくなってしまいます (超曲面 C4)．ブラックホールは，ノーヘアー定理によって極めて少ない種類の物理量のみで特徴づけられることが証明されており，今の例のように質量のみで特徴づけられるブラックホールは，一意的にシュワルツシルトブラックホールになることが知られています．そして，ホーキングの半古典論に基づく計算によると，このブラックホールが放出するホーキング輻射も質量のみで決まるホーキング温度で特徴づけられた熱的分布を示します．それゆえ，ブラックホール形成前に存在していた情報の一部がブラックホールの蒸発によって欠落してしまうことになります．言い換えると，ブラックホールの形成・蒸発過程で起きているのは純粋状態から混合状態への遷移という，通常の量子論では許されない過程になっているわけです．これがいわゆるブラックホールの情報喪失問題です[4]．

この問題に対する解答案は今までに山のように出されています．そのうち現時点でも排除されてない例を挙げると，ホーキング輻射が熱的な輻射に見えるのはあくまでホーキングが用いた半古典論の枠内の話である，というものがあります．つまり，より詳細な取扱いをすれば，ホーキング輻射としてブラックホールから飛び出す粒子は量子的にもつれた状態になっており，それによって情報が外部に持ち出されるおかげで，ブラックホールの形成・蒸発の一連の過程において情報は保存している，というわけです．他にも，ブラックホールは完全に蒸発するわけではなくて，最終状態として何らかの残留物が残るため，それを考慮に入れると全体として情報は保存するだろう，というものもあります．しかし，明確かつ定量的な意味でブラックホールの情報喪失問題に対する決着がついたとは，現在でも言い難いところです．

上記の例はどちらも情報が保存する可能性を主張したものですが，一方で情報が保存しない可能性，つまり，量子論の破綻を主張する研究者たちも 20 世紀にはたくさんいました．そして，その旗手とでも言うべき存在がホーキングでした．しかし，次の節で説明する AdS/CFT 対応の発見とそれに基づくブラックホールに対する物理的理解を理由として，21 世紀に入ってすぐに，ホーキングも情報の喪失はないとの結論に同意しています[5]．以下ではこの話を簡単に説明したいと思います．

3. AdS/CFT 対応

近年，超弦理論における D ブレーンの研究から，**AdS/CFT 対応**と呼ばれる一種の双対性がマルダセナによって発見されました[6]．これは，量子重力の本質的特徴の一つと考えられている，**ホログラフィー**と呼ばれる性質を捉えた定量的な例になっています．(この対応がどの程度成立するかという点に関しては，専門家の間でも意見が分かれるところではありますが) この双対性が主張するのは，反ドジッター時空に漸近する時空上の重力理論と “その境界に住む” 1 次元低い共形場理論の間の等価性です．

現在，AdS/CFT 対応はブラックホールを微視的観点から解析する上で最も強力な道具の一つです．ストロミンジャーとヴァッファによるブラックホールのエントロピーの微視的導出で重要だったのは，ブラックホールに対応する微視的状態が超対称性で守られている点でした．そのような場合，状態の縮退度については理論の結合定数に依存しないため，共形場理論による記述が良いパラメータ領域へ移動して対応する量を計算することで，ブラックホールのエントロピーの微視的に導出したわけです．それに対して，AdS/CFT 対応はあるパラメータ領域における理論そのものの等価性を主張するわけですから，その威力は絶大です．

4. AdS/CFT 対応と情報喪失問題

それではまず第一に，ブラックホールの情報喪失問題を理解をするためにAdS/CFT対応を使ってみましょう[8)]．ここでは簡単のため，BTZブラックホール（Banados–Teitelboim–Zanelliという発見者の名前に由来します）と呼ばれる，負の宇宙項をもつ3次元重力理論に登場するブラックホール解を考えることにします[7)]．この解はストロミンジャーとヴァッファが初めてブラックホールのエントロピーを微視的に導出するのに成功した，D1-D5-P系と呼ばれるDブレーンの束縛状態として記述されるブラックホール解とも密接に関係しており，超弦理論の文脈において最も詳細な解析が行われているブラックホールの一つです．このブラックホールは（境界上での空間方向をコンパクト化した）3次元反ドジッター時空に漸近する時空構造をしているため，AdS/CFT対応を用いることで，無限次元対称性を持つ2次元共形場理論によって記述することが可能です．

BTZブラックホールに対応する（拡張された）ペンローズ図は図2のように書くことができます．ここで最も注目すべき点は2つの時間的境界が存在していることです．それゆえ，AdS/CFT対応に従うと，双対な共形場理論が両境界上に存在することになります．いま，系全体の状態 $|\Psi\rangle$ は，次のように2つの共形場理論のヒルベルト空間に含まれる状態のテンソル積として記述することができます：

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z_{\mathrm{CFT}}(T)}}\sum_n e^{-\frac{E_n}{2k_{\mathrm{B}}T}}|n\rangle_1 \otimes |n\rangle_2 . \quad (5)$$

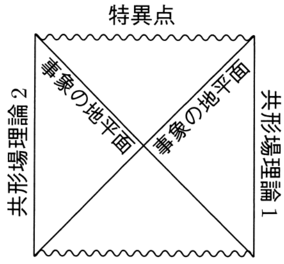


図2　BTZブラックホールの拡張されたペンローズ図．2つの時間的境界が存在します．

ここで $Z_{\mathrm{CFT}}(T)$ は共形場理論の分配関数，E_n はエネルギー固有値です．また，T は系の温度を表しますが，AdS/CFT対応によりブラックホールのホーキング温度に一致します．

では，片方の境界に住んでいる共形場理論上で定義された演算子 $\mathcal{O}_1$ の期待値を計算してみましょう．今の場合，他方の境界に住む理論に対応する状態の内積からくる寄与により，つまり，2つの境界に住む共形場理論の間の量子的もつれの効果によって，ブラックホールのホーキング温度で特徴づけられる密度演算子が現れます．それゆえ，最終的に得られるのは

$$\langle\Psi|\mathcal{O}_1|\Psi\rangle = Tr_{H1}(\rho\mathcal{O}_1) \quad (6)$$

という有限温度の相関関数になります．ただし，ここで Tr_{H1} は $\mathcal{O}_1$ を定義したほうの共形場理論の状態空間におけるトレース，ρ は温度 T の場合の密度演算子で

$$\rho = \frac{1}{Z_{\mathrm{CFT}}(T)}\exp\left(-\frac{H}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \quad (7)$$

（H は共形場理論のハミルトニアン）によって与えられます．

マルダセナは上記のような相関関数を評価することで，反ドジッター時空に漸近するブラックホールの物理をさらに追求し，情報喪失問題に対するAdS/CFT対応に基づく一つの説明を与えました．

ここでも上と同様に，BTZブラックホールを考えることにします．このブラックホールは，前述のシュワルツシルトブラックホールとは違い，永遠に存在することが可能（英語ではeternal）ですが，相関関数の振舞いから情報の喪失が生じることがわかります．実際，BTZブラックホール上の2つの演算子を考えて，それらの二点相関関数を重力側で計算すると，時間とともに指数的に減衰することがわかります．これはブラックホールの事象の地平面に情報が落ち込んでしまったことを意味しています．

一方で，BTZブラックホールはAdS/CFT対応を通じて境界上に住む共形場理論によって記述することが可能ですが，ここで登場する共形場理論

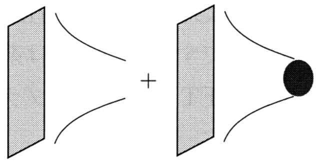
$$Z_{\mathrm{CFT}} = $$  $+ \cdots$

図 3　共形場理論の分配関数には，漸近的な構造が同一の様々な時空からの寄与が含まれています．

はよく知られているようにユニタリーな理論です．特に，この理論を用いて具体的に二点相関関数を計算すると，対応する量を重力側で計算した結果とは違って，指数的な減衰は示しません．AdS/CFT 対応が成り立つとすると，これは一見矛盾しているかのようにみえます．

ただし，ここで注意すべきなのは，境界上に住んでいる共形場理論の分配関数には，漸近的構造を同一にする様々な時空からの寄与が数多く含まれているということです（図 3）．半古典的な描像に立った場合には，通常，一つの時空に着目したうえで，そこで情報が失われているか否かを議論することになります．それゆえ，ブラックホールのような位相的に非自明な解の上での物質場の振舞いを半古典的に評価すると，ホーキングが指摘したように情報が喪失するようにみえてしまいます．しかし，ホログラフィーの立場，さらには量子重力の立場からより自然な描像というのは—経路積分を想像してもらえば理解しやすいと思いますが—様々な時空からの寄与を足し上げることです．そのため，BTZ ブラックホールだけでなく，同様の漸近的構造をもつ（境界での空間方向がコンパクト化された）熱的な 3 次元反ドジッター時空からの寄与も加味する必要があります．実際，そこまで考慮すると，相関関数も全体として指数的にゼロに近づくことはなく，共形場理論側と無矛盾な結果を与えることがわかります．それゆえ，情報の喪失が生じることはない，というのが AdS/CFT 対応に基づく情報喪失問題に対する説明です[9]．

情報喪失問題に対するこの説明は AdS/CFT 対応が成り立つ場合に対するものであって，一般の時空に対して適用可能ではありませんし，また，失われたと思っていた情報がどのように回復したのかという問いに対する明確な答えを与えるものでもありません．しかし，AdS/CFT 対応が実現しているホログラフィーと呼ばれる性質が，量子重力の最も重要な性質の一つであるとすれば，上記の理解は深淵でかつ普遍的なものであり，ブラックホールの情報喪失問題を完全に解決するための足がかりとしては，最良のものであるといって良いでしょう．

このように，AdS/CFT 対応はブラックホールを理解する上で，現代における最も強力な道具です．以下では次に，近年 AdS/CFT 対応の文脈において提唱されたエンタングルメントエントロピーについての関係式と，それに基づくブラックホールのエントロピーに対する理解について説明したいと思います．

5. エンタングルメントエントロピーのホログラフィックな導出とブラックホールエントロピー

近年，笠・高柳により，共形場理論のエンタングルメントエントロピーを双対な重力理論を用いて計算するホログラフィックな手法が提案されました[10]．そして，この手法を用いることにより，ブラックホールのエントロピーを共形場理論側のエンタングルメントエントロピーとして理解できる可能性が指摘されました．

この手法に関する詳細は高柳氏の記事を参考にしていただくことにして，ここではその主張のみを簡潔に述べておきます．まず，共形場理論側の空間を A, B の 2 つに分割します．すると理論の全ヒルベルト空間は，これらの 2 つの領域に対応するヒルベルト空間のテンソル積の形で与えられます．そこで，まず，この理論の純粋状態を考え，対応する密度演算子を構成します．そして，片方の領域（例えば B とします）に対応するヒルベルト空間の状態のみをトレースアウトしてしまうことにより，縮約された密度演算子を作ることができます．すると，領域 A にいる観測者がトレース

アウトした領域Bの情報を知ることができないのに対応して，エンタングルメントエントロピーは一般にノンゼロになります．

笠・高柳はAdS/CFT対応を用いることで，領域Aと領域Bを分けている境界に端を持ち，反ドジッター時空方向にのびた極小曲面の面積 $A_{\rm MS}$ に比例する形で，領域Aのエンタングルメントエントロピーが与えられる，という提案をしました．具体的には次のような関係式によってエンタングルメントエントロピーが与えられます：

$$S_{\rm EE} = \frac{A_{\rm MS} k_{\rm B} c^3}{4G_{\rm N}\hbar}. \qquad (8)$$

では，エンタングルメントエントロピーとブラックホールのエントロピーの関係をみるために，BTZブラックホールに対して笠・高柳の関係式を使ってみることにしましょう．共形場理論側では，上述のようにしてエンタングルメントエントロピーを考えることができます．今の場合，これに対応する重力側の極小曲面はその分割面に端を持つ測地線になります．そこで，次第に領域Aを大きくしていくと，対応する測地線は図4のようにブラックホールの事象の地平面に巻き付き，その長さは最終的に事象の地平面の面積（今の場合1次元なので地平線の長さのことです）と等しくなります．つまり，上記の関係式とベッケンスタイン–ホーキングのエントロピー公式は一致し，ブラックホールのエントロピーは共形場理論側のエンタングルメントエントロピーとして理解できるという結論になります．

もしかすると，上記の議論はBTZブラックホールのような反ドジッター時空に漸近するブラックホールに特有ではないかと思うかもしれません．しかし，実は，臨界ブラックホールとか極限ブラックホール（英語ではextremal）とか呼ばれる，ホーキング温度がゼロでホーキング輻射をしないブラックホールの多くに対しても，類似の理解をすることが可能です．臨界ブラックホールを考えた場合，事象の地平面近傍の時空構造の一部として，2次元反ドジッター時空が頻繁に登場します．そのような場合，AdS/CFT対応を用いることにより，このブラックホールの性質の一部を調べることが可能です．その際に特に注目すべきなのが，3次元以上の反ドジッター時空とは違って，大域的に2つの時間的境界が存在するという，2次元反ドジッター時空の特殊性です．そのため，BTZブラックホールの拡張されたペンローズ図と同様に，2つの時間的境界上に住む双対な理論間の量子的なもつれを考えることが可能です．そして，両境界に住む理論間のエンタングルメントエントロピーを，AdS/CFT対応を用いて重力側から具体的に評価した結果，ブラックホールのエントロピーに一致することが明らかになりました[11]．

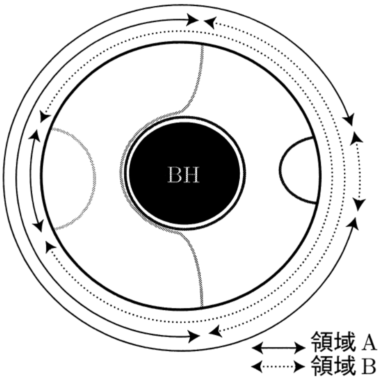


図4 BTZブラックホールとエンタングルメントエントロピー．極小曲面がブラックホールの事象の地平面に巻き付く様子．

臨界ブラックホールの場合にさらに興味深いのは，二階の微分項のみを持つアインシュタイン重力理論の枠にとどまらず，高階微分補正を含むような重力理論においても同様の解析が可能な点です．超弦理論のように極めて高エネルギーの世界を記述する理論から始めた場合，低エネルギーではアインシュタイン重力理論からのずれに対応する補正項が高階微分の形で登場します．その際にはブラックホールのエントロピー公式にも修正が加えられ，ベッケンスタイン–ホーキング–ウォルド公式と呼ばれる関係式によって与えられることになります[12]．高階微分補正を考慮した場合に笠・高柳の手法を用いて2つの境界上に住む理論間のエンタングルメントエントロピーを計算すると，まさにこの補正を考慮した公式と完全に一致しま

す．このように，アインシュタイン重力理論を超えて上述の議論が適用可能であることは，ブラックホールのエントロピーをエンタングルメントエントロピーと関連づけて理解することが一般的に可能であることを示唆している，と言うことができるかもしれません．

さらに，最近では同様の手法をブラックホールの生成消滅といった時間発展を理解するために適用しようという試みもあり，この場合にも情報の喪失がないことを支持する結果が得られています[13]．

6. まとめ

ブラックホールの物理を理解する上で，エンタングルメントは重要なキーワードの一つです．そして，ブラックホールのエントロピーとエンタングルメントエントロピーの関係には多くの研究者たちが興味を抱いています．また，ブラックホールのエントロピー公式がその種類によらず普遍的に与えられることからも，エンタングルメントエントロピーと関連づけて理解することができるのではないかと期待するのは，自然なことだと思います．

繰り返しにはなりますが，ブラックホールの種々の不思議な性質を理解することは，量子重力の本質を理解するための原動力とでもいうべきものです．そして，近年，AdS/CFT 対応という強力な道具立てを手にしたことにより，ブラックホールのエントロピーとエンタングルメントエントロピーをより明確に，かつ，定量的につなぐことが可能になりました．ただ，広い視野でみた場合，やっと理解が可能になってきたというのが的確な表現ではないかと思います．現在の枠組みを超えて，より一般にそれらの関係が明らかになったときにこそ，我々の量子重力に対する理解は飛躍的に進展するだろう，と個人的な意見ではありますが期待しております．

参考文献

1) S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 1999.
2) A. Strominger and C. Vafa, *Phys. Lett. B***379** (1996) 99.
3) L. Bombelli, R.K. Koul, J. Lee and R.D. Sorkin, *Phys. Rev. D***34** (1986) 373.
4) S.W. Hawking, *Phys. Rev. D***14** (1976) 2460.
5) 情報喪失問題に関する歴史的経緯は，レオナルド・サスキンドによる『ブラックホール戦争 スティーヴン・ホーキングとの 20 年越しの闘い』（日経 BP 社，2009 年）に詳細な記述があります．
6) J.M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231.
7) M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849.
8) J.M. Maldacena, *JHEP***0304** (2003) 021.
9) S.W. Hawking, *Phys. Rev. D***72** (2005) 084013.
10) S. Ryu and T. Takayanagi, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181602.
11) T. Azeyanagi, T. Nishioka and T. Takayanagi, *Phys. Rev. D***77** (2008) 064005.
12) R.M. Wald, *Phys. Rev. D***8** (1993) 3427.
13) T. Takayanagi and T. Ugajin, *JHEP***1011** (2010) 054.

（あぜやなぎ・たつお，理化学研究所仁科加速器研究センター）

物性物理とブラックホール熱力学



高柳　匡

1. はじめに

素粒子物理学は，物質の最小単位（素粒子）の探求を研究の対象とし，物性物理学は，素粒子の一つである電子が多数集まったときの集団としての法則を研究する学問である．両者の対象は異なるが，理論的に互いに深い関わり合いをもつことが多々ある．今から50年程度前の歴史的ともいえる例として，南部らが発見した「自発的対称性の破れ」という現象が挙げられ，素粒子のヒッグズ機構において中心的な役割を果たし，物性物理では，超流動や超伝導の基礎となっている．両者は，ランダウ・ギンズブルグ理論として統一的に理解され，このことから，物性現象をユニバーサルに捉えようとする視点と素粒子理論が密接にかかわっていることが分かる．

それがさらに顕著になった例が，2次元共形場理論による臨界現象の記述と言えよう．例えば，磁石（物性物理では強磁性体と呼ばれる）の温度を上げていくと変化して，磁石としての性質を失う．このような相転移点では，様々な物理量が発散するなどして特異的になり，臨界現象と呼ばれる．このような系では，系の大きさを何倍かしても理論が不変に保たれる，つまり**スケール不変性**を有し，系を特徴付ける臨界指数を定義できる．一方，素粒子理論の基礎理論である場の量子論では，スケール不変性は，共形対称性と呼ばれる対称性に自然に拡大されると期待され，**共形場理論**（Conformal Field Theory，略してCFT）と呼ばれる．特に，2次元，つまり時間と空間が一つずつの時空，の共形場理論に関しては，共形対称性が無限次元のビラソロ対称性になるので，詳しい解析が可能で，その対称性だけから厳密に物理量を決定できる場合もある．このような研究は，1980年代に盛んに行われ，古典2次元系（空間2次元で時間なし）や量子1次元系（時間1次元と空間1次元）の臨界現象の分類（ユニバーサリティークラス）が，2次元共形場理論の分類に帰着することから多くの成果が得られた．

では，高次元の量子臨界点に関してはどうであろうか？ 実際，物性物理の興味深い対象には量子2次元系の臨界点がしばしば登場するので，これは大変重要な問題である．例えば，高温超伝導体や重いフェルミオン系の相構造からも2次元の量子臨界点が予想されているし，量子ホール効果のプラトー転移や最近話題となっているグラフェンにも現れる．このような系では，相互作用が強く，摂動論による解析にも限界があり，ユニバーサルに量子臨界点を記述したり分類したりすることができる枠組みがあるととても役に立つと考えられる．場の理論の立場では，高次元の共形場理論で記述されるが，その対称性は前述の2次元の場合と違い，あまり強力ではない．従って，何か新しいアイデアが必要となる．

素粒子の基礎理論には，最終的には重力も含まれなければならないが，そのためには物質の基本

単位を粒子と思うと問題が生じるが，弦（ひも）だと思うことで解決する．これが**超弦理論**であるが，実はこの分野の最近の研究から高次元量子臨界点の問題を解く鍵と期待される原理が発見されて，ここ 4,5 年物性物理へ応用する試みが盛んに研究がなされている[1,2]．この目新しい物性物理へのアプローチは，不思議なことに重力理論をうまく利用し，いわば，「物性物理の量子多体系＝ブラックホール」のような等価性と言える．本特集のテーマである**ブラックホールの熱力学**は，物性物理の言葉に直すと，通常の熱力学そのものに対応するのである．以下ではこの話題を順を追って説明していきたい．

2. ホログラフィー原理と AdS/CFT 対応

一般相対論に従うと，大量の重い物質をとても小さな空間に閉じ込めてどんどん圧縮し，その大きさがシュワルツシルド半径と呼ばれる半径よりも小さくなると，重力崩壊という現象が起こりブラックホールになってしまう．従って，このブラックホールの中には，もともとの物質の情報が入っているはずであるが，非常に強い重力にひきつけられるために光ですらブラックホールの中から出てくることはできず，外の観測者はその情報を知ることができない．このような状況を物理的に解釈すると，ブラックホールには，**エントロピー**（＝隠された情報量）があると推測される．実際に，ブラックホールの質量をエネルギーと解釈すると，熱力学の法則を導くことができ，エントロピーは，ブラックホールの表面（地平面）Σ の面積を $\mathrm{Area}(\Sigma)$ と書き，ニュートン定数を G_N として，有名なベッケンシュタイン・ホーキング公式

$$S = \frac{\mathrm{Area}(\Sigma)}{4G_N} \tag{1}$$

で与えられる．このブラックホールの熱力学の詳細は，本特集の他の記事に譲ることにする．この公式の驚くべき点は，通常の熱力学では，体積に比例するはずのエントロピーが，ブラックホールでは面積に比例しているという点である．また，前述の重力崩壊の議論から，ブラックホールが許される最大のエントロピーを持つことは明らかなので，重力理論の自由度自体が，体積ではなく面積に比例するという事実が分かる．このように，理論が重力を含むか否かは，自由度という面で非常に大きな違いを持っているのである．

さて，d 次元の時間的な境界 ∂M を持つ $d+1$ 次元時空 M を考えよう．この時に，最大のエントロピーが面積に比例することから，自由度は時空全体 M ではなく，その境界部分 ∂M に存在していると考えるのはそれほど不自然ではない．これを少し発展させて，「M 上の重力理論が，∂M 上の重力を含まない量子論と等価である」という主張がなされた．これが**ホログラフィー原理**である[3]．これ自体は，直観的な議論に基づいていて，本当にどのような時空に対して正しく成り立つ原理なのか明らかではなかった．

しかしその後，このホログラフィー原理を実現する明確な具体例が見つかり，一躍，超弦理論の中心テーマの一つに成長した．これがマルダセナによって 1997 年に発見された **AdS/CFT 対応**である[4,5]．AdS とは反ドジッター空間のことで，負の宇宙項を持つ時空の中で，最大の対称性をもつ空間である．$d+1$ 次元の半径 L の反ドシッター空間 AdS_{d+1} は，ポワンカレ座標では

$$ds^2 = L^2 \frac{dz^2 - dx_0^2 + \sum_{i=1}^{d-1} dx_i^2}{z^2} \tag{2}$$

という計量で与えられる．一方，CFT は前述したように共形場理論を意味する．AdS_{d+1} 空間の時間的境界は，(2) の $z \to 0$ の極限で定義される $R^{1,d-1}$ で与えられ，CFT はその上で定義されている．ホログラフィー原理に従って，「AdS_{d+1} 上の重力理論（もしくは超弦理論）が，その境界の $R^{1,d-1}$ 上の共形場理論と等価である」という関係が得られるが，これがまさしく AdS/CFT 対応の主張である．ここで，特に共形場理論が出てきた理由は，AdS_{d+1} の幾何学的対称性と，d 次元の共形対称性が全く同じリー群 $SO(d,2)$ で与えられるからである．

より具体的に AdS/CFT 対応を調べるには，超

弦理論のDブレインと呼ばれるものを導入する必要があるが，以下で興味あるのは，ホログラフィーをユニバーサルな視点で捉えることであるので，本稿では詳細には立ち入らない．しかし，そのような議論を通して理解される重要な事実として，「AdSの半径が大きいほど（小さいほど），それと等価なCFTの相互作用は強い（弱い）」という関係が一般的に成り立つことは記憶しておいて頂きたい．AdSの半径が小さいと，重力理論の量子効果が無視できなくなって計算が困難になる．そこで以下では，半径が大きい場合を考えるが，それはCFT側では相互作用が大きいところに対応する．これは，物性物理の通常の手法では解析しにくい強結合の量子臨界点を，古典的な重力理論で記述できることを意味していて大変都合がよいのである．もう一点は，「この場合のCFTは，ラージ N 極限をとった $SU(N)$ 非可換ゲージ理論で与えられる」ということである．

例えば金属のように，物性物理に出てくるような量子凝縮系を記述するには，電荷密度や温度といったパラメータを導入する必要があり，その場合には，系にマクロなエントロピーが生じる．重力理論でエントロピーを古典論のレベルを持つにはブラックホールを考えるしか方法はない．従って，対応する重力理論は，AdS空間にある電荷を持ったブラックホールということになる．負の宇宙項を持ち，電磁場（$U(1)$ ゲージ場 A_μ）と結合する重力理論を一般相対論で記述する理論（アインシュタイン・マックスウェル理論と呼ばれる）は，

$$S=\int dx^4\sqrt{-g}\left[\frac{1}{4}\left(R+\frac{6}{L^2}\right)-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right] \quad (3)$$

の作用で定義される．ここで，2形式 F は，ゲージ場の強さ $F=dA$ を表す．実際，この理論において，有限温度で，電荷をもったブラックホール解が存在し，

$$ds^2=\frac{L^2}{z^2}\left(-f(z)dt^2+\frac{dz^2}{f(z)}+dx^2+dy^2\right),$$
$$f(r)=1-\left(1+\frac{\mu^2 z_+^2}{L^2}\right)\frac{z^3}{z_+^3}+\frac{z_+^2\mu^2}{L^2}\frac{z^4}{z_+^4},$$

表1 様々な物性系とそのホログラフィー双対例．

物性系	重力双対例
金属	電荷を持つ AdS BH
超伝導	スカラー場+AdS BH
(非)フェルミ液体	フェルミオン場+電荷を持つ AdS BH
絶縁体	AdS ソリトン
トポロジカル絶縁体	D ブレイン+AdS ソリトン

$$A_t=\mu\left(1-\frac{z}{z_+}\right) \quad (4)$$

で与えられる．$z=z_+$ はブラックホールの地平面に相当し，μ は，化学ポテンシャルを意味し，電荷に比例する．

このようにAdS/CFTでは，強結合量子臨界点に相当する金属状態は，電荷を持ったブラックホール解に対応する[1,6]．ブラックホールは，（4次元では）無毛定理があるなどユニバーサルな性質を持つので，それが量子臨界点の性質を知る上で役に立つと期待される．また，AdSブラックホールの熱力学は，CFTの通常の熱力学にちょうど対応し，ブラックホールの熱力学とは何なのか？という疑問に対する一つの答えになっている．

また他の物質の様々な状態もAdS/CFT対応で記述できる．例えば，絶縁体は，系を励起する際にエネルギーギャップがあることを意味するが，AdSソリトンと呼ばれる背景はその一例と言え[7]，さらに超弦理論のソリトンであるDブレインを含めることで，物性物理で最近盛んに研究されているトポロジカル絶縁体に相当する系を記述することもできる[8]．その他，超伝導などいくつかの例は以下で説明するが，まとめたものを表1に載せた．

3. 電気伝導率の計算

物性物理の実験で観測できる様々な量のうち，最も基本的で重要な物理量の一つが，**電気伝導率**であり，それによって，物質の状態が，金属，超伝導，半導体，絶縁体などのどれであるかを決定することができる．（x 軸方向に）電場をかけたときにそれと平行に電流密度が生じるが，（x 軸方向の）電気伝導率は，$\sigma_{xx}=j_x/E_x$ のように，その

比例係数として定義される．

AdS/CFT において，電気伝導度の計算はかなり容易に行うことができる．物性物理の定義と同じように，AdS の境界 $z=0$ で，電場 $E_x = F_{tx}$ をかけたときの電流密度を計算することで求められる．AdS_4 ブラックホール解 (4) の背景でゲージ場の方程式を解くことで A_x が求められるが，境界 $z=0$ 近傍で

$$A_x = A_x^{(0)}(t,x,y) + A^{(1)}(t,x,y)z + O(z^2)$$

のように展開したとする．AdS/CFT の原理に従って計算をすると，$A_x^{(0)}$ が，外場（物性系の電磁場）で，$A_x^{(1)}$ が，電流密度 j_x に対応することが分かる．特に，周波数 ν の交流の周波数を考え，空間的に一様とすると，電気伝導度は，

$$\sigma_{xx}(\nu) = \frac{j_x}{E_x} = \frac{A^{(1)}}{-i\nu \cdot A^{(0)}} \tag{5}$$

と計算される[1]．このように，本来，量子多体系の性質を記述する量が，AdS/CFT を用いると微分方程式の境界値問題という古典的な問題として計算することができる．この微分方程式の具体的な計算は一般に数値的に行うことになるが，それは大変シンプルなもので，通常のパソコンでも 1 分もかからないうちに結果を求めることができる．より実際の量子臨界点付近の金属状態に近い系を記述するためには，プローブブレインという手法を用いることもよく行われる．この場合は，D ブレインを AdS 空間において，ブレイン上のゲージ場を電磁場とみなし，CFT にあるグルーオン場が，フォノンの役割を担うという利点がある．このような系での電気伝導率の計算の一例を図 1 に示した．電荷密度の違う 4 つの場合を同時にプロットした．周波数がゼロの近傍でのピークはドルーデピークと解釈され，直流電気伝導度を与える．電荷密度が高いほどその値は大きくなっている．2+1 次元系の特徴として，周波数 ν が大きいと，一定値に $\text{Re}(\sigma)$ が近づき，特に電荷がゼロに場合は，ν によらず一定値となる．類似した振舞いが，グラフェンで実際に観測されている．

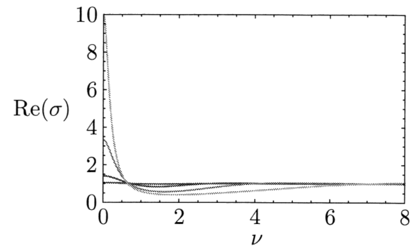


図 1　プローブブレインを用いた交流電気伝導率（実部）の計算例（文献 11) 参照）．横軸が周波数．

最後に，量子ホール効果の AdS/CFT における記述についてコメントしておく．ホール効果は，磁場が z 軸方向に存在する（x-y 軸方向に広がった）2 次元量子系に，x 軸方向に電場をかけると，y 軸方向に電流が流れる現象である．そのときの比例係数（ホール電気伝導度）$\sigma_{xy} = j_y/E_x$ が，e^2/h を単位として整数（や分数）量子化される現象が（分数）量子ホール効果である．ここで e は電子の電荷，h はプランク定数である．前述の系では，パリティが保存されているので $\sigma_{xy} = 0$ である．量子ホール効果を起こすには，作用 (3) に，パリティを破る項（θ 項とも呼ばれる）

$$S_\theta = \frac{\theta}{4\pi}\int F \wedge F \tag{6}$$

を加えればよい．このトポロジカルな項は，運動方程式には寄与しないが，ホール電気伝導度には寄与し，$\sigma_{xy} = \theta \cdot \frac{e^2}{h}$ と AdS/CFT から求められる．実際に超弦理論の特別な場合として具体的にこのような系を実現しようとすると，D ブレイン電荷の量子化から，θ というパラメータが整数や分数に量子化されることがさらに分かるのである[9]．以上の説明で明らかなように，この現象は，ゲージ場のトポロジカルな量と密接な関係になっている．このような考えを高次元や低次元などに一般化した系は，**トポロジカル絶縁体**と呼ばれ，数学の K 理論を用いて分類される[10]（超弦理論における実現は文献 8) を参照）．

4. エンタングルメント・エントロピーの計算

物性物理において，現実の系を理論的に量子多体系のモデル（例えばスピン系やハバードモデル）で記述しようとするときに，様々な複雑なハミルトニアンを解析する必要があり，多くの場合に数値計算がなされることが多い．その場合に，今考えているハミルトニアンの基底状態（エネルギーが最小の状態で絶対零度の系に相当）がどのような性質をもっているか理解することはとても重要である．このためには，理論の詳細によらないユニバーサルな量がどのように振る舞うかで性質を分類できると便利である．その目的で特に最近盛んに利用されている量が，**エンタングルメント・エントロピー**である．またこの量は，量子多体系の数値計算を行う際の量子揺らぎによる誤差の見積りにも使われる．

このエントロピーは次のように定義される．量子系を密度行列 ρ_{tot} で記述する．特に，純粋状態（絶対零度では通常こうなっている）では，系の状態ベクトル（波動関数）$|\Psi\rangle$ を用いて，$\rho_{tot} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ と書ける．このとき，系を A と B の部分系に分けよう．系全体のヒルベルト空間 H_{tot} は，$H_{tot} = H_{\mathrm{A}} \otimes H_{\mathrm{B}}$ のように直積になる．部分系 A に制限された密度行列 ρ_{A} を，$\rho_{\mathrm{A}} = \mathrm{Tr}_{H_{\mathrm{B}}} \rho_{tot}$ のように B に関してトレースアウトして定義する．最後に，部分系 A に関するエンタングルメント・エントロピーは，ρ_{A} のフォンノイマン・エントロピー $S_{\mathrm{A}} = -\mathrm{Tr}[\rho_{\mathrm{A}} \log \rho_{\mathrm{A}}]$ として定義される．

物性物理で興味の対象となる系は無限に近い自由度を有していて，連続極限では場の理論として扱うことができることが多い．この場合は，部分系 A と B を，場の理論が定義されている空間を 2 つに分けることで定義できる．分け方は自由なので，無限個の違うエンタングルメント・エントロピー S_{A} を定義できることになる．自由度が無限であるので，一般に S_{A} は発散しているが，d 次元（空間 $d-1$ 次元と時間）の場の理論において，その発散の主要項は，

$$S_{\mathrm{A}} = (\text{定数}) \cdot \frac{\mathrm{Area}(\partial \mathrm{A})}{\epsilon^{d-2}} + \ldots \qquad (7)$$

のように A の体積ではなく，その境界 ∂A の面積に比例する．ここで ϵ は格子間隔（紫外カットオフ）に相当する微小量である．これを面積則と呼ぶ．系にフェルミ面がある場合や，$d = 2$ の共形場理論では，面積則が破れ，log のスケールだけ大きくなることが知られている．また，系の詳細の情報は，(7) で省略されているより小さい発散項や有限項に含まれていると期待されるが，場の理論の手法でそれらを計算するのは特別な場合を除いて困難である．

そこで，AdS/CFT 対応を用いるとどうであろうか？ 物性理論の研究者の笠真生と，超弦理論の研究者である筆者の共同研究で明らかになったことは，エンタングルメント・エントロピー S_{A} を AdS/CFT で計算すると

$$S_{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{Area}(\gamma_{\mathrm{A}})}{4G_N} \qquad (8)$$

のように，ブラックホールのエントロピー (1) と似た形になり，幾何学的に計算できることである[2]．ここで，γ_{A} は，AdS_{d+1} の中の $d-1$ 次元の空間的曲面であり，特に，その境界が ∂A と一致し，面積が最小となるもの（最小曲面）を選ぶ（図 2 参照）．G_N は AdS_{d+1} 上の重力理論のニュートン定数である．

さて，(8) を用いて S_{A} の具体的な計算例に触れたい．d 次元共形場理論を考え，部分系 A を半径 l の球面内とするならば，それと等価な AdS_{d+1} 内の最小曲面は，(2) の座標を用いると，$z^2 + \sum_{i=1}^{d} x_i^2 = l^2$ で表される半球面になる．その面積を求めることで，S_{A} が求められ，d が偶数

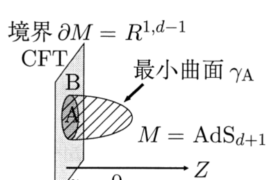


図 2 エンタングルメント・エントロピーの AdS/CFT における計算．

の場合は,

$$S_{\mathrm{A}} = p_2 \frac{l^{d-2}}{\epsilon^{d-2}} + p_4 \frac{l^{d-4}}{\epsilon^{d-4}} + \cdots + q \log(l/\epsilon) + p_d$$

となり（p_i や q はそれぞれ計算可能な定数），log の発散項の係数 q はセントラルチャージに比例することが分かる．また，d が奇数の場合は，

$$S_{\mathrm{A}} = p_2 \frac{l^{d-2}}{\epsilon^{d-2}} + p_4 \frac{l^{d-4}}{\epsilon^{d-4}} + \cdots + p_d$$

のようになり，有限項 p_d がカットオフ ϵ に依存しないので興味深い量となる．セントラルチャージは奇数次元では定義できないが，その代わりに自由度を表す量としてこの p_d を用いることが期待される．

以上のように，この公式 (8) によって，本来，量子的な量を古典的な幾何学的な量としてずっと簡単な方法で計算することを可能にする．言い換えると，「量子情報の幾何学化」を実現しているとも言える．実際，量子情報理論で重要な不等式である強劣加法性は，(8) を用いると簡単に証明できる．そのほかにも様々な応用例があり現在でも盛んに研究がなされているが，紙面の都合上省略したい．本誌の畔柳氏の記事も参照されたい．

5. 超伝導状態，非フェルミ液体の記述

さて，**超伝導状態**はどのように AdS/CFT 対応で記述できるであろうか？ 有効場の理論において，超伝導は，クーパーペアに相当するボソン場が凝縮する（期待値を持つ）現象として記述される．従って，AdS/CFT においても AdS 空間内のスカラー場が凝縮する場合に相当するだろうと予想される．事実，この単純な推測は正しいことが以下に説明するように分かる[12]．そこで，重力場とゲージ場以外に電荷を帯びた複素スカラー場 Φ を加えた理論を考えて，前述の作用 (3) に次のようなスカラー場の標準的な作用を加える．

$$S_s = \int dx^4 \sqrt{-g}\Big[-|D_\mu \Phi|^2 - m^2|\Phi|^2\Big]$$

ここで，$D_\mu = (\partial_\mu - iqA_\mu)$ は共変微分であり，q はスカラー場の持つ電荷である．ゲージポテンシャル A_t が非自明な場合のスカラー場の古典論での有効ポテンシャルは，

$$V(\Phi) = (-|g_{tt}|q^2 A_t^2 + m^2)|\Phi|^2 \qquad (9)$$

となる．電荷を帯びたブラックホール解 (4) の背景を考えると，$\mu(\sim A_t)$ が十分大きいと，ポテンシャルの $|\Phi|^2$ に係数が負になり系が不安定になると思われる．実際に数値的に運動方程式を解いて調べると，μ を大きくしたり温度を下げたりすると，あるところで 2 次相転移が起こり，スカラー場不安定になり凝縮し，真空期待値を持つようになる．これが，AdS/CFT による金属から超伝導体へ変化する過程の記述に相当する[12]．例えば，直流電気伝導率は無限に大きくなるという一番有名な性質や，交流電気伝導度にギャップがあることなども確かめることができる．また，AdS ブラックホールではなく AdS ソリトンと呼ばれる背景にゲージポテンシャルを入れると，今度は，絶縁体から超伝導体への 2 次相転移を記述することができる[7]．

さてそれでは，スカラー場をフェルミオン場（ディラック場）に置き換えるとどのような現象が見られるだろうか？ フェルミオンなので，真空期待値を取ることはできないが，電荷を持つ AdS ブラックホール中のフェルミオンの 2 点関数は非自明になり得ることが分かる[13]．AdS/CFT に従って，CFT ではフェルミオン的演算子 O_F の 2 点関数に相当する．低エネルギーでの遅延 2 点関数の振舞いからフェルミ面の存在が分かり，その近傍では，

$$\langle O_F(\omega,k) O_F(-\omega,-k)\rangle \sim \frac{a}{(k-k_F) - \omega/v - b\cdot\omega^{2h}} \qquad (10)$$

のようになる．ここで，ω は振動数（=エネルギー），k は，波数（k_F はフェルミ波数）を意味する．また，a, b, h, v は定数である．2 点関数の極として，準粒子の分散関係が決まるが，低エネルギー極限 $\omega \to 0$ で，それは

$$k - k_F \propto \omega \quad (\text{if } h > 1/2),$$
$$k - k_F \propto -\omega \log \omega \quad (\text{if } h = 1/2), \qquad (11)$$
$$k - k_F \sim \omega^{2h} \quad (\text{if } h < 1/2),$$

のようになる[13]．最初の場合は，通常のフェルミ液体と同じ分散関係であるが，さらに調べると準粒子の寿命の値がランダウのフェルミ液体とは異なる振舞いをすることが分かる．残りの 2 つは，明らかにフェルミ液体とは異なる分散関係を持つ．これらのようなフェルミオンの状態は，総称して**非フェルミ液体**と呼ばれる．特に $h_k = 1/2$ の場合は，マージナルフェルミ液体と呼ばれ，銅酸化物高温超電導体のストレンジメタル相で実現されていることが実験結果から予想されている．

6. おわりに

本稿では，最近の超弦理論の話題の一つである AdS/CFT 対応の物性物理への応用に関して網羅的に説明してきた．AdS/CFT の最も重要な利点は，強結合の量子多体系を古典的な重力で記述できるということである．このおかげで，従来の量子論的な解析では困難であった非フェルミ液体のような量子相の記述や，エンタングルメント・エントロピーのような物理量の計算が比較的に容易に行うことができるようになった．しかしながら常に注意しなくてはならないことは，AdS/CFT が古典重力で記述されるには，CFT のラージ N 極限を取る必要があるということである．逆に，ラージ N で強結合であるならば，どんな系でもかなりユニバーサルに振る舞うことを AdS/CFT は示唆している．

紙面の都合上触れられなかったが，強結合系の時間に依存する現象の解析にも AdS/CFT は強力な手法を与えてくれる．絶対零度にある系を外力などで励起し熱化する過程（その特別な場合は量子クエンチとも呼ばれる）は，AdS 空間の重力でみるとブラックホールを形成する過程に相当する．このことから熱化の時間発展を調べることができる．この場合は，ブラックホールの情報問題などとも関係して大変興味深い．このように見ると，逆の方向性，つまり AdS 空間の量子重力理論を理解するために CFT を解析するという研究も今後重要になると思われる．

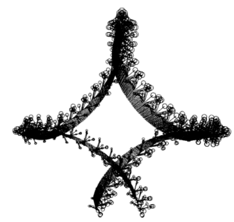
参考文献

1) 専門的なレビュー論文をいくつか挙げると，S.A. Hartnoll, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 224002; J. McGreevy, *Adv. High Energy Phys.* **2010** (2010) 723105.
2) 日本語で書かれたレビューとして，高柳匡，笠真生：日本物理学会誌 **64** (2007) 421 を参照．専門的レビューは，T. Nishioka, S. Ryu and T. Takayanagi, *J. Phys. A* **42**, 504008 (2009).
3) 日本語のレビューとして本誌 2007 年 12 月号特集における高柳の記事「ホログラフィック理論とは何か？」を参照．
4) 原論文は J.M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998). 専門的なレビューは，O. Aharony *et. al.*, *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) を参照．
5) 日本語のレビューとして別冊・数理科学「量子重力理論」(2009 年）の高柳の記事「量子重力と共形場理論」を参照．
6) C.P. Herzog, P. Kovtun, S. Sachdev and D.T. Son, *Phys. Rev. D* **75** (2007) 085020.
7) 原論文として，T. Nishioka, S. Ryu and T. Takayanagi, *JHEP* **1003**, 131 (2010), や G.T. Horowitz and B. Way, *JHEP* **1011**, 011 (2010) を参照．
8) 原論文は，S. Ryu and T. Takayanagi, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 086014.
9) 原論文は，J.L. Davis, P. Kraus and A. Shah, *JHEP* **0811**, 020 (2008) と M. Fujita, W. Li, S. Ryu and T. Takayanagi, *JHEP* **0906**, 066 (2009).
10) 分類を初めて行った論文は，A. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, A. Ludwig, *Phys. Rev. B* **78**, 195125 (2008). また，K 理論を用いた分類は，A. Kitaev, *AIP Conf. Proc.* **1134**, 22 (2009).
11) S.R. Das, T. Nishioka and T. Takayanagi, *JHEP* **1007**, 071 (2010).
12) 専門的なレビューとして，G.T. Horowitz, arXiv:1002.1722 [hep-th].
13) T. Faulkner, N. Iqbal, H. Liu, J. McGreevy and D. Vegh, *Science* **329** (2010) 1043. 原論文は，H. Liu, J. McGreevy and D. Vegh, arXiv:0903.2477 [hep-th].

（たかやなぎ・ただし，東京大学数物連携宇宙研究機構）

重力と熱力学

熱力学から一般相対論は導出できるか



福間　将文

1. はじめに

自然界には4つの相互作用があり，重力以外の電磁相互作用・弱い相互作用・強い相互作用の3つは，ゲージ対称性を持つ局所場理論として量子力学的な記述が可能になっている．しかしながら，重力は，エネルギーを持つものに普遍的に働く力でありながら，いまだに量子力学的な記述ができていない．こうした記述が可能な**量子重力理論**の最有力候補として超弦理論があるが，重力を扱うはずの閉じた弦については，果たしてこれを基本的な力学的自由度として扱うべきか疑問が持たれ始めている．実際，閉じた弦の摂動論における非摂動効果の形は，閉じた弦の場の理論の構築が極めて難しいことを意味しているし，また，AdS/CFT 対応に代表される「閉じた弦と開いた弦の間の双対性」は，重力子や閉じた弦が他のより基本的な力学的自由度の集団座標として表現可能であることを示唆しているように見える．

このように，量子重力理論の構築のためには，まず，重力における基本的な力学的自由度が何であるかをしっかりと同定することが最重要であると思われる．その際に重要な指導原理になると考えられているのが，本特集でもくりかえし出てきている**ホログラフィー原理**である．これは，重力場自身が単なる有効場ではなく，熱的な性質を持つことを反映している．

読者はこれまで本特集において，一般相対論から熱力学的関係式が導かれることを見てこられたと思う．本稿ではこれと逆のプロセス，つまり「熱力学から一般相対論を導く」ということがどこまで可能かについて議論することで，重力の持つ熱的性質がどこまでそのダイナミクスを規定しているかを議論したい．

以下では，$c = k_{\mathrm{B}} = 1$ と置き，Planck 定数 $\hbar$ と Newton 定数 G をあらわに書く．

2. ブラックホールの熱力学の復習

本節ではまず，ブラックホールが，エントロピーという熱力学的量を持つことを簡単に復習しておく[1]．

ブラックホールの内部は因果的に物質が外に逃げられなくなる領域であるが，その領域と外部とを分ける境界のことを**事象の地平線**（あるいはたんに**ホライズン**）と言う．例えば，質量 M の Schwarzschild ブラックホールは，ホライズンの外側で，$\mathrm{d}s^2 = -(1-2GM/r)\mathrm{d}t^2 + (1-2GM/r)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2$ の計量を持つが，半径 $r_0(M) \equiv 2GM$ の球面がホライズンであり，その面積は

$$A = 4\pi r_0^2 = 16\pi G^2 M^2 \tag{1}$$

である．

今，この Schwarzschild ブラックホールに，何らかの物質をゆっくりと入れてみる．するとホライ

ズンの外側の物質系にとっては，情報の一部がホライズンに隠れてしまうので，エントロピーは減少する（$\Delta S_{物質} < 0$）．これは一見エントロピー増大の法則に反するように思える．一方，ブラックホールの質量は増加するはずであるから（$\Delta M > 0$），式(1)より，ホライズンの面積も増大することが分かる（$\Delta A > 0$）．実は，このことは，物質のエネルギーの正定値性や因果性に関する適当な仮定の下で一般的に言えて，『任意のブラックホールに対する任意の古典的プロセスにおいて，ホライズンの面積は必ず増大する』ことが証明できる（Hawkingの面積則）．

そこでBekensteinは，ブラックホールにもエントロピーを割り当てることで上の問題を解決することを提案した[2]．具体的には，ブラックホールがホライズンの面積に比例したエントロピーを持つとし（$S_{\rm BH} \propto A$），物質系とブラックホールを合わせた全エントロピー $S_{全体} \equiv S_{物質} + S_{\rm BH}$ が，どんな物理的過程に対しても時間とともに単調増加するべきだと主張したのである（$\Delta S_{全体} \geq 0$）．これを**一般化された熱力学第2法則**（GSL: Generalized Second Law）と言う．なお，$S_{\rm BH}$ とホライズンの面積の比例係数はHawkingにより

$$S_{\rm BH} = \frac{1}{4G\hbar} A \qquad (2)$$

と決定された．

3. 状態方程式としての Einstein 方程式

3.1 Unruh 効果

一般相対論の一番の基本は等価原理である．それは，時空の各点 p において，計量が微分展開の1次まではMinkowski計量と一致するように局所座標系（局所慣性系）を取れるというものである．実際，重力場中の力学の大半は，局所慣性系で議論したものをそのまま一般共変にすることで得ることができる．そのため，まずMinkowski時空自身が持つ熱的性質，より正確にはその部分空間であるRindler時空が持つ熱的性質を復習しよう．

Minkowski時空 $\mathcal{M}$ は，Poincaré群の対称性を持つ．以下簡単のため(1+1)次元を考え，その座標を $(x^\mu) = (t, x)$ $(\mu = 0, 1)$ とおく．このとき，計量は $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$ で与えられる．$\mathcal{M}$ 上では，次の2つの時間的な（timelike）Killingベクトル場を考えることができる：

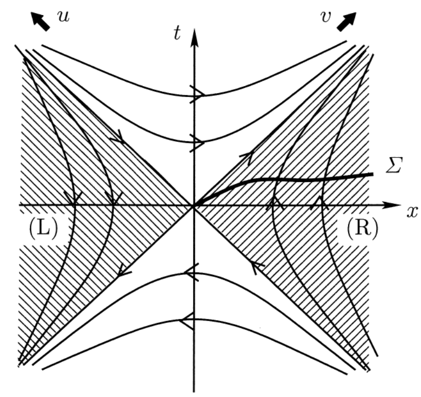


図1　2つのRindler wedge (L)と(R)．矢印はboost Killingベクトル場 $\bar{\xi}_{\rm R}$ を表す．

(1) $\xi_{\rm M} = \xi^\mu_{\rm M}\partial_\mu \equiv \partial/\partial t$．$\xi^2_{\rm M} = g_{\mu\nu}\xi^\mu_{\rm M}\xi^\nu_{\rm M} = -1$ であるから，$\xi_{\rm M}$ は $\mathcal{M}$ の全領域で時間的である．対応する演算子が通常使われているHamiltonian H であり，真空 $|0\rangle$ は H の基底状態として定義される．$|0\rangle$ は，通常の場合，さらにPoincaré不変にもなっている．

(2) $\bar{\xi}_{\rm R} \equiv t\,\partial/\partial x + x\,\partial/\partial t$．これはLorentz boostを生成する．$\bar{\xi}^2_{\rm R} = t^2 - x^2$ であるため，$\bar{\xi}_{\rm R}$ は領域 $x^2 > t^2$ でのみ時間的である（図1を見よ）．この領域は2つのくさび状の領域（Rindler wedge）からなり，左側を(L)，右側を(R)と書くことにする．とくに(R)では $\bar{\xi}_{\rm R}$ は未来的である．これに対応するHamiltonianを $\bar{H}_{\rm R}$ と書く．

今，(R)においてCauchy surface（今の場合は曲線）Σ を図のように置き，$\bar{H}_{\rm R}$ による時間発展を考える．このとき，(L)内のデータは Σ の未来に何の影響も与えない．一方，$\mathcal{M}$ 全体をHamiltonian H で扱う場合には，Cauchy surfaceは(L)と(R)の両方をまたぐ必要がある．そこで，(R)上のHilbert空間に制限するように(L)をtrace outすると，次の式が成立する[3]：

$$\rho_{\rm R} \equiv {\rm tr}_{\rm L}\,|\,0\,\rangle\langle\,0\,| = \frac{e^{-\bar\beta_0 \bar H_{\rm R}}}{{\rm tr}_{\rm R}\, e^{-\bar\beta_0 \bar H_{\rm R}}}\,. \qquad (3)$$

ここで $\bar\beta_0 = 2\pi/\hbar$ である．式 (3) は，pure state の密度行列 $\rho \equiv |\,0\,\rangle\langle\,0\,|$ を領域 (R) に制限すると，それが $\bar H_{\rm R}$ に関する温度 $\bar T_0 = 1/\bar\beta_0 = \hbar/2\pi$ の canonical アンサンブルを与えることを意味している．つまり，標語的に書けば，(R) に制限した状況では

『H に関する真空 $=$ $\bar H_{\rm R}$ に関する熱的状態』

が成り立っている．なお，$\bar T_0$ は無次元だが，これはそもそも $\bar\xi_{\rm R}$ が無次元であったためである．

$\bar H_{\rm R}$ を Hamiltonian とする見方をより明確にするため，領域 (R) に対して，次の Rindler 座標 $(x^\mu_{\rm R}) = (t_{\rm R}, x_{\rm R})$ $(-\infty < t_{\rm R} < \infty\,,\, 0 < x_{\rm R} < \infty)$ を導入する：

$$t = x_{\rm R}\,\sinh(\kappa\, t_{\rm R})\,, \qquad (4)$$

$$x = x_{\rm R}\,\cosh(\kappa\, t_{\rm R})\,. \qquad (5)$$

このとき計量は

$$ds^2 = -(\kappa\, x_{\rm R})^2 dt_{\rm R}^2 + dx_{\rm R}^2 \qquad (6)$$

となる．この計量を持つ領域 (R) を **Rindler 時空**と言う．とくに，「$x_{\rm R}=$一定」の軌道は，固有加速度の大きさ a が $a = 1/x_{\rm R}$ の等加速度運動になっていることが容易に確認できる．ここで，「$x_{\rm R}=$一定」の軌道における局所的な固有時間 $\tau_{\rm R}$ は $d\tau_{\rm R} = (\kappa\, x_{\rm R})\, dt_{\rm R}$ と書けるので，$t_{\rm R}$ を用いて測定したときの加速度は $(d\tau_{\rm R}/dt_{\rm R})(1/x_{\rm R}) = \kappa$ となり，すべての軌道に対して共通の値をとる．また，

$$\xi_{\rm R} \equiv \frac{\partial}{\partial t_{\rm R}} = \kappa\left(x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}\right) = \kappa\,\bar\xi_{\rm R} \qquad (7)$$

であるから，$t_{\rm R}$ に対応する Hamiltonian を $H_{\rm R}$ とすれば，$H_{\rm R} = \kappa\,\bar H_{\rm R}$ となることが分かる．これに応じて，$H_{\rm R}$ を用いて定義される温度は，

$$T_0 = \kappa\,\bar T_0 = \frac{\hbar\kappa}{2\pi} \qquad (8)$$

となる[4)]．なお，局所固有時間 $\tau_{\rm R}$ を用いて測定した局所温度 T は，$T = (dt_{\rm R}/d\tau_{\rm R})T_0 = \hbar\, a/2\pi$ $(a = 1/x_{\rm R})$ と固有加速度の大きさに比例する．この T を **Unruh 温度**という．

3.2 Killing ホライズン

$\mathcal{M}$ の構造をもう少し見るため，光円錐座標 (u, v) を $u \equiv t - x = -x_{\rm R}e^{-\kappa\, t_{\rm R}}$，$v \equiv t + x = x_{\rm R}e^{\kappa\, t_{\rm R}}$ として導入する．このとき，“ホライズン” $u = 0$ はヌル測地線であり，その接ベクトル k $(k^\nu\nabla_\nu k^\mu = 0)$ は affine パラメーター v により $k = \partial_v$ と表される．一方，Killing ベクトル場 $\xi_{\rm R} = \kappa\,(v\partial_v - u\partial_u)$ もこのホライズンに接していて，ホライズン上で $\xi^\mu_{\rm R} = \kappa\, v\, k^\mu$ の関係がある．

一般に，Killing ベクトル場 ξ の **Killing ホライズン**[5)] $\mathcal{N}$ に対し，ξ に対応する座標を α と書き，ヌル測地線に対する affine パラメーターを λ とする：$\xi = \partial_\alpha$，$k = \partial_\lambda$（上の例では $\alpha = t_{\rm R}$，$\lambda = v$）．このとき，surface gravity κ は $\mathcal{N}$ 上で $\xi^\nu\nabla_\nu\xi^\mu = \kappa\,\xi^\mu$ として定義される．κ は $\mathcal{N}$ の各軌道上で定数であるが，とくに κ が 0 でなく $\mathcal{N}$ 全体で定数のときは，affine パラメーター λ を共通に $\lambda = \pm e^{\kappa\,\alpha}$ の形に取ることができ，

$$\xi^\mu = \kappa\,\lambda\, k^\mu \qquad (9)$$

となる[1)]．$\lambda = 0$ における codimension 2 の面を**分岐面**と言う（上の例では $u = v = 0$ の原点）．

3.3 局所 Rindler ホライズン

熱的性質に関する 3.1 節の議論を局所慣性系に対して適用するため，Jacobson に従って局所 Rindler ホライズンという概念を導入する[6)]．

時空の各点 p と，そこでのヌルベクトル（光線）k^μ が与えられたとき，p を含む微小な空間的 2 次元面 B を，その面から垂直に出る光線束が expansion θ と shear $\sigma_{\mu\nu}$ を持たないように選ぶ：$\theta|_p = \sigma_{\mu\nu}|_p = 0$（図 2 を見よ）．このとき，$B$ から出る光線束を B から過去に遡ってできる 3 次元領域（面積を表す空間 2 次元とヌル測地線の affine パラメーター λ の 1 次元）を**局所 Rindler ホライズン**（LRH: Local Rindler Horizon）と呼ぶ．LRH は点 p と光線 k と微小面 B に依存する，局所的に定義された概念であることに注意せよ．以下では affine パラメーター λ を $\lambda|_p = 0$ と選び，LRH では $\lambda < 0$ であるとする（図 3 を見よ）．

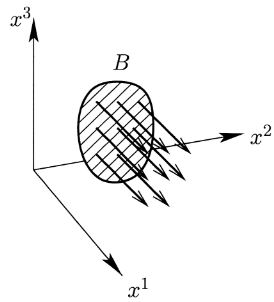


図2　3次元空間内の微小面 B と光線束．B は光線束の expansion と shear が0になるように取る．ここでは k^μ を x^1 方向に取った．

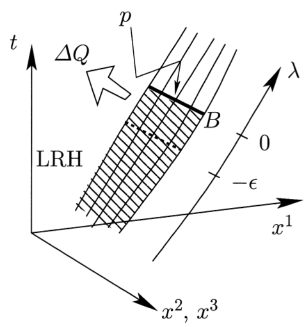


図3　4次元空間内の LRH（1次元落として描いてある）．

こうして点 p において LRH を構成しておけば，p の周辺で近似的な boost Killing ベクトル場 ξ を LRH がその Killing ホライズンとなるように指定することができ，B を近似的な分岐面として 3.1 節の議論を適用することができる．また，3.2 節で述べたように，ξ は，LRH の affine パラメーター λ を用いた接ベクトル $k=\partial_\lambda$ と $\xi^\mu \simeq \kappa\lambda k^\mu$ と対応する．

3.4 Einstein 方程式の導出

Jacobson は次の仮定を置くことで，熱力学の第1法則から Einstein 方程式が導かれることを示した[6]：

- (仮定1) LRH は $T_0=\hbar\kappa/2\pi$ の熱浴とみなせ，boost energy flux はホライズンを横切る際にその温度で thermalize される．
- (仮定2) エントロピー S はホライズンの面積 A に等分配される：$S=\alpha A$（α は正の定数）．

まず，energy flux p^μ は，物質場の energy-momentum テンソル $T^{\mu\nu}$ を用いて，$p^\mu = -T^{\mu\nu}\xi_\nu$ と表される（ξ が Killing ベクトル場のときには，$T^{\mu\nu}$ の保存則 $\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0$ と Killing 方程式 $\nabla_\mu\xi_\nu+\nabla_\nu\xi_\mu=0$ より $\nabla_\mu p^\mu=0$ が言える）．したがって，LRH 上の p 近傍の領域 $(-\epsilon,0)\times B$ を横切る energy flux は次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
\Delta Q &= \int_{(-\epsilon,0)\times B} \mathrm{d}\Sigma_\mu\, p^\mu = \int_{-\epsilon}^{0}\mathrm{d}\lambda \int_B \mathrm{d}^2A\, k_\mu\, p^\mu \\
&= -\int_{-\epsilon}^{0}\mathrm{d}\lambda \int_B \mathrm{d}^2A\, T_{\mu\nu}\,\xi^\nu k^\mu \\
&= -\kappa\int_{-\epsilon}^{0}\mathrm{d}\lambda \int_B \mathrm{d}^2A\,\left[\lambda T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu + O(\lambda^2)\right].
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ここで，領域 $(-\epsilon,0)\times B$ の微小体積要素 $\mathrm{d}\Sigma_\mu$ が $\mathrm{d}\Sigma_\mu=\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}^2A\,k_\mu$ と表せることを用いた．

一方，エントロピーの変化は，(仮定2) より，面積変化から計算できる．まず，λ を変化させたときの expansion $\theta\equiv(\mathrm{d}^2A)^{-1}(\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda)(\mathrm{d}^2A)$ の変化が次の Raychaudhuri 方程式で記述されることを思い出す[1]（今の場合は rotation $\omega_{\mu\nu}=0$）：

$$
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu . \tag{11}
$$

$\lambda=0$ において $\theta=\sigma_{\mu\nu}=0$ なので，式 (11) を積分すれば，考えている微小領域 $(-\epsilon,0)\times B$ で，

$$
\theta = -\lambda R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu + O(\lambda^2) \tag{12}
$$

となることが分かる．すると (仮定2) より，$\lambda=-\epsilon$ から $\lambda=0$ までのエントロピー S の変化が，その間の面積の変化を用いて，次のように与えられる：

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= \alpha\,\Delta A = \alpha\int_{-\epsilon}^{0}\mathrm{d}\lambda\int_B \mathrm{d}^2A\,\theta \\
&= -\alpha\int_{-\epsilon}^{0}\mathrm{d}\lambda\int_B \mathrm{d}^2A\,\left[\lambda R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu + O(\lambda^2)\right].
\end{aligned}
\tag{13}
$$

すべてが準静的に行われたとすると，熱力学の第1法則と (仮定1) より，次の式が成立する：

$$
\Delta Q = T_0\,\Delta S \quad (T_0=\hbar\kappa/2\pi). \tag{14}
$$

κ が定数であることと，式 (10) と (13) を用いると，

$$
\left(T_{\mu\nu} - \frac{\hbar\alpha}{2\pi}R_{\mu\nu}\right)k^\mu k^\nu = 0 \tag{15}
$$

が，p におけるすべてのヌルベクトル k^μ に対し

て成り立たなければならないことが分かる．これより，

$$R_{\mu\nu} - \frac{2\pi}{\hbar\alpha} T_{\mu\nu} = \Phi g_{\mu\nu} \tag{16}$$

を得る．Φ は $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ を課すことで決まり，実際，Bianchi 恒等式 $\nabla^\mu\bigl(R_{\mu\nu} - (R/2)g_{\mu\nu}\bigr) = 0$ より，$\Phi = R/2 + \Lambda$ (Λ：定数) を得る．定数 α を $\alpha = 1/4G\hbar$ と置けば[7]，結局 $g_{\mu\nu}$ が

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{17}$$

という方程式を満たさなければならないことが分かる．これは，Newton 定数 G，宇宙定数 Λ の Einstein 方程式そのものである．

上の 2 つの仮定は，ホログラフィー原理から要請される重力の熱力学的性質とみなすことができる．これから Einstein 方程式が導かれるということから Jacobson は，Einstein 方程式を基礎方程式とみなすのではなく，ある種の熱力学的な状態方程式とみなすべきではないかと提案した[6]．

4. エントロピー力としての重力

Erik Verlinde は最近，上記の立場をさらに推し進め，重力がエントロピー力として解釈できるのではないかという提案を行った[9]．実際のところ，この解釈の是非はまだ確定しておらず，以下では基本的なアイデアのみを述べる．ただし，かなり我流の解釈が入っていることをお断りしておく．

4.1 Bekenstein の思考実験[2]

まず，ブラックホールのホライズン近傍の様子を量子論的に考察しよう．以下とくに Schwarzschild ブラックホール

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{2\phi(r)}\mathrm{d}t^2 + e^{-2\phi(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2\,,$$
$$e^{2\phi(r)} \equiv 1 - \frac{r_0}{r} \quad (r_0 \equiv 2GM) \tag{18}$$

のホライズン近傍を考える：$r \gtrsim r_0$．ここで，$\phi(r)$ は重力ポテンシャルに対応する．また，固有時間で測った固有エネルギーを E とすると，これに "red-shift factor" $\sqrt{-g_{00}} = e^\phi$ をかけた $E_0 \equiv e^\phi E$ は，Killing のパラメーターである時間 t で測ったエネルギーとなり，重力のポテンシャルエネルギーも含んでいることに注意しておく．

今，思考実験として，ホライズン近傍にある質量 m の粒子をゆっくりと動かして，ホライズンの中へ入れることを考える．ここで，量子論では，質量 m の粒子の位置を決定する際に Compton 波長 $\lambda_\mathrm{C} \equiv \hbar/m$ 程度の不確定性が必ずあることを思い出せば，粒子がホライズンから λ_C 程度の距離にいれば粒子はすでにホライズンにいるとみなす必要がある．

以下，$r = r_0 + \rho$ $(0 < \rho \ll r_0)$ とおき，$r = r_1$ $(\Leftrightarrow \rho = \rho_1)$ がホライズンから Compton 波長 $\lambda_\mathrm{C} = \hbar/m$ だけ離れた座標に対応するとすれば，$e^{2\phi(r)} = 1 - r_0/r \simeq \rho/r_0$ より，

$$\frac{\hbar}{m} = \int_{r_0}^{r_1} \mathrm{d}r \sqrt{g_{rr}} = \int_{r_0}^{r_1} \mathrm{d}r\, e^{-\phi(r)}$$
$$\simeq 2(r_0\,\rho_1)^{1/2} \tag{19}$$

となる．一方，質量 m の粒子がホライズンに入ることによるエネルギーの増加は，redshift factor $e^{\phi(r_1)} \simeq (\rho_1/r_0)^{1/2}$ をかけて，

$$\Delta E_0 \simeq m\left(\frac{\rho_1}{r_0}\right)^{1/2} = \frac{\hbar}{2r_0} \tag{20}$$

となる．ここで，式 (19) を使って ρ_1 を消去した．したがって，温度 $T_0 = \hbar\kappa/2\pi = \hbar/4\pi r_0$ のブラックホールのエントロピーの変化は[10]，Clausius の関係式 $\Delta S_\mathrm{BH} = \Delta E_0/T_0$ から，次で与えられる：

$$\Delta S_\mathrm{BH} = \frac{\Delta E_0}{T_0} = \frac{4\pi r_0}{\hbar} \cdot \frac{\hbar}{2r_0} = 2\pi\,. \tag{21}$$

4.2 エントロピー力とは

エントロピー力の典型的な例はゴム弾性である．ゴムは高分子鎖の集合体であるが，今簡単のため，決まった長さ l を持つ 1 本の高分子鎖を考える．形状によるエネルギー変化がないとすれば，一端を原点に固定して他端を空間座標 $\boldsymbol{x}$ に取ったときのエントロピー $S(\boldsymbol{x})$ は，$S(\boldsymbol{x}) \sim \log\bigl[\mathbf{0}$ から $\boldsymbol{x}$ までのステップ数 l のランダム・ウォークの数$\bigr] \sim S(\mathbf{0}) - (\text{定数}) \cdot |\boldsymbol{x}|^2$ となり，これは $\boldsymbol{x}$ が原点に近いほど大きくなる．実際のゴムでは多数の高分子鎖を考えることになるが，この「端点が近いほど形状の配位の数が大きくエントロピーが大きい」ことがゴム弾性の本質である．このように，エネ

ルギー変化とは無関係に，エントロピーが大きくなるように引き起こされる巨視的な力を**エントロピー力**と言う．通常は，エネルギー変化に起因する力と次元を合わせるために，エントロピー力 f は，温度 T をかけて $f = T\,\partial S/\partial x$ と定義される（x はエントロピー変化を引き起こすパラメーターで，上の例では座標 $\boldsymbol{x}$ が該当する）．

4.3 エントロピー力としての重力

以下，古典的な Newton 重力に議論を限定する．Einstein 重力に対する拡張は原論文を参照されたい．また，系は定常状態にあるとし，並進不変な時間 t があるとする．

基本的なアイデアは，空間が無数の**スクリーン**からなる葉層構造（foliation）を持ち，そのスクリーンは「すでに粗視化が済み時空（重力）が発現している外側の領域」と「まだ microscopic な自由度で記述されていて，時空も発現していない内側の領域」を仕切るものであるとすることである（図 4 を見よ）．ここで，2 枚のスクリーンに挟まれている領域は，内側のスクリーンにとってはすでに粗視化が済んでいるが，外側のスクリーンにとってはまだ粗視化が済んでいない領域である．このように，より内側のスクリーンに行くほど，より microscopic な自由度が見えてくることになる．もし，あるところでこれ以上進めない領域があったとすれば，この限界のスクリーンの内部は完全なブラックボックスであるから，そのスクリーンはブラックホールのホライズンに相当するとする．

このような状況の下で次の定量的な仮定をする：

- (仮定 1) スクリーンの外側の近傍でスクリーンに対して静止している観測者から見ると，スクリーン内部の microscopic な情報はスクリーン上に蓄えられ，スクリーンは一定の温度を持つ熱浴とみなせる．とくに，スクリーン近傍の粒子を静止させるのに必要な固有加速度の大きさを a とすると，その温度は Unruh 温度 $T = \hbar a/2\pi$ で与えられる．
- (仮定 2) スクリーンの外側の近傍において，質量 m の粒子をスクリーンから垂直に Δx だけ引き離すと，スクリーンのエントロピーは $\Delta S = -(2\pi m/\hbar)\Delta x$ と減少する[11]．

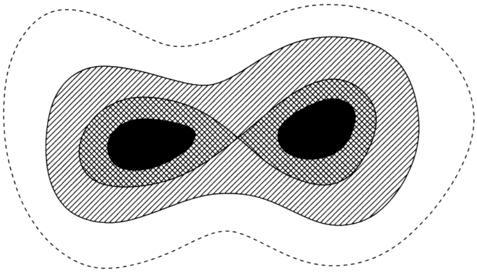


図 4　スクリーンからなる 3 次元空間の葉層構造．

これらの仮定は，前節までに見たように，スクリーンがブラックホールのホライズンである場合には確かに成立している．Verlinde の議論の新しい点は，ブラックホールのホライズン以外にもこうした性質を持つオブジェクト（つまりスクリーン）を導入し，空間とはこのようなスクリーンが層状に重なってできたものであるとしたことである．

まず，上の仮定から Newton の力の（第 2）法則がエントロピー力として導かれることが，容易に分かる．実際，スクリーン近傍において固有加速度 a に対応するエントロピー力を計算すれば，

$$f = T\,\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\hbar a}{2\pi}\cdot\frac{2\pi m}{\hbar} = ma \qquad (22)$$

となる．さらに，各スクリーンが「$\phi =$ 一定」という等ポテンシャル面として表されるようにポテンシャル関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ を導入すれば，法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は ϕ の勾配 $\boldsymbol{\nabla}\phi$ に比例する．とくに加速度が $a_i = \partial_i\phi$ と書けているとすれば，この ϕ は重力ポテンシャルに他ならず，スクリーンの温度は $T = (\hbar/2\pi)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi$ として表される．

万有引力の法則も次のように仮定をさらに置くことで導くことができる．今，スクリーンを半径 R の球面に取り，その球面の近傍に質量 m の粒子を置く．また，スクリーンの内部の全エネルギーを M とする．このとき，

- (仮定 3) 球面上には bit 数 $N \equiv A/G\hbar$ の自由度が一様に分布している．
- (仮定 4) エネルギーとその自由度との間には，エネルギー等分配則 $M = (1/2)NT$ が成立する．

今の場合, bit 数は $N = 4\pi R^2/G\hbar$ で与えられるため, 温度は $T = 2M/N = \hbar GM/2\pi R^2$ となる．したがって, エントロピー力は, $f = -T\varDelta S/\varDelta x = -(\hbar GM/2\pi R^2)\cdot(2\pi m/\hbar) = -GMm/R^2$ となり，万有引力の法則が導かれる．同様の議論により，ϕ が Poisson 方程式 $\boldsymbol{\nabla}^2\phi = 4\pi G\rho$ に従うことも示すことができる[9)]．

Jacobson が Einstein 方程式を導出したように, Verlinde の枠組みでも Einstein 方程式が導けそうに思われるが，今の場合は（ヌル方向を含まない）空間的な 3 次元内の積分を扱うことになるため，完全な導出は成功していない．

5. 結語

この数十年間の研究により，ブラックホールが熱力学的な性質を持つことは広く認識されているが，いまだに，その本質的な理由は明らかになっていない．最近では多くの研究者が，重力はブラックホールのホライズン近傍でなくても熱力学的性質を持ち，さらには，そのことが重力を特徴付け，ダイナミクスまで規定しているのではないか，と考え始めている．本稿ではその考えを支持する最近の状況証拠をいくつか議論した．

熱力学とは系の macroscopic な記述法であるが, それは一般に，microscopic な自由度を空間と時間の両方に対して平均化することで得られる．ここで, 空間的な平均化は通常の粗視化であるが, 時間方向については位相空間上の時間平均（アンサンブル平均）である．重力の熱力学的性質の起源を明らかにし，さらには量子重力理論の真に基本的な力学的自由度を同定するためには，熱力学における粗視化の意味を原点に立ち返って考え直す必要があるように思われる[12)]．

謝辞：本稿について京都大学の酒谷雄峰氏から多くの貴重なコメントをいただいた．ここに記して感謝する．

注と参考文献

1) 一般相対論の基礎事項を扱った，定評のある教科書としては, R.M. Wald, “General Relativity”, Chicago University Press (1984) がある．ブラックホールの熱力学については P.K. Townsend, “Black holes”, arXiv:gr-qc/9707012 が読みやすい．

2) J.D. Bekenstein, “Black holes and entropy”, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2333.

3) W.G. Unruh, “Notes on black hole evaporation”, *Phys. Rev. D* **14** (1976) 870; W.G. Unruh and N. Weiss, “Acceleration radiation in interacting field theories”, *Phys. Rev. D* **29** (1984) 1656.

4) この κ は Killing ホライズンの surface gravity に対応する量である（後述）．ただし，Rindler 時空は漸近的に平坦でないため，κ を一意に決定する $\xi_{\rm R}$ の自然な規格化はない．

5) ヌルな法線ベクトルを持つ超曲面 $\mathcal{N}$ について，ある Killing ベクトル場があり，それが $\mathcal{N}$ 上で法線方向を向いているとき（ヌルなので接しているのと同じ), $\mathcal{N}$ を ξ の Killing ホライズンという[1)]．

6) T. Jacobson, “Thermodynamics of space-time: The Einstein equation of state”, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 1260 [arXiv:gr-qc/9504004]; C. Eling, R. Guedens and T. Jacobson, “Non-equilibrium thermodynamics of spacetime”, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 121301 [arXiv:gr-qc/0602001].

7) この比例定数は，ブラックホールのホライズンのときのもの [式 (2)] と同じである．

8) LRH を定義する際，各点 p において expansion と shear が 0 となるように取ったが，そう取らない場合は非平衡過程の記述に対応することが，前掲[6)]の第 2 論文で議論されている．

9) E.P. Verlinde, “On the Origin of Gravity and the Laws of Newton”, *JHEP* **1104**, 029 (2011) [arXiv:1001.0785 [hep-th]].

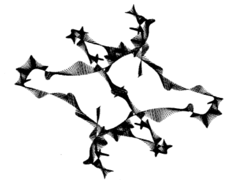
10) Schwarzschild ブラックホールのホライズンの近傍において $r = r_0 + x_{\rm R}^2/4r_0$ $(x_{\rm R} > 0)$ とおくと, $e^{2\phi(r)} \simeq (x_{\rm R}/2r_0)^2$ となるため，計量は, $\mathrm{d}s^2 \simeq -(x_{\rm R}/2r_0)^2\mathrm{d}t_{\rm R}^2 + \mathrm{d}x_{\rm R}^2 + r_0^2\mathrm{d}\Omega^2$ $(t_{\rm R} = t)$ と Rindler 時空のものになる．このことより, Killing のパラメーター $t = t_{\rm R}$ で測ったときの加速度が $\kappa = 1/2r_0$ になることが分かる．この κ は surface gravity と一致する．

11) $\varDelta x$ をちょうど Compton 波長 $\lambda_{\rm C} = \hbar/m$ に取った場合が, 4.1 節の Bekenstein の議論に対応する．$\varDelta x$ を固定したときに $\varDelta S$ が m に比例するのは，エネルギーとエントロピーの示量性から自然である[9)]．

12) 最近，エントロピー汎関数という局所汎関数を導入することにより,（相対論的）連続体力学に対しても, Onsager の線形回帰理論に基づいた非平衡熱力学の手法がそのまま適用できることが示された：M. Fukuma and Y. Sakatani, “Entropic formulation of relativistic continuum mechanics”, *Physical Review E* に掲載予定 [arXiv:1102.1557].

（ふくま・まさふみ，京都大学大学院理学研究科）

時空の散逸と熱揺らぎ



磯　暁

1. はじめに

ブラックホールは，アインシュタイン方程式の解の一つである．4 次元のブラックホールの場合，質量，角運動量，電荷の 3 つの自由度しかもたない（無毛定理）．これは星が組成や形などバラエティに富んでいるのと対照的である．このようにほとんどバラエティのない解であるにも関わらず，ブラックホールは巨大なエントロピーをもち，ホーキング輻射と呼ばれる熱輻射をもつ．古典解の唯一性（無毛定理）と矛盾するようなブラックホールの熱力学的性質はいったいどこからくるのであろうか．

この解説では，ブラックホールの特徴的な性質である熱散逸や熱揺らぎが，相対論のもつ因果性とどのように関係しているのかを説明する．

2 節では相対論のもつ因果性を，一様加速する観測者とブラックホールを例にとって解説する．3 節では，ブラックホールが完全吸収体であることから，ブラックホールの熱散逸，とくに電気伝導のオームの法則や流体の Navier–Stokes 方程式が自然に現れることを説明する．これはメンブレン・パラダイムと呼ばれており，ここから AdS/CFT 対応の基礎となるホログラフィック原理へと導かれていく．4 節では，因果性が量子論に与える影響について考える．ここで重要な役割を果たすのが，「量子異常」と呼ばれる場の理論の普遍的現象である．量子異常により，ブラックホールは，輻射を発生することがわかる．これはホーキング輻射と呼ばれており，熱揺らぎの源となる．最後に 5 節では，熱揺らぎから示唆される時空の微視的構造に思いをはせながらまとめとする．

2. 時空と因果律

2.1 光速度と因果律

特殊相対性理論によると，どんなものも光に追いつくことはできず，またいかに速く走る人から見ても光は常に同じ速さで進む．アインシュタインは，この光速度不変の原理から，「同時性」という概念をつきつめ，時間と空間についての深い考察にたどりついた．このことはまた相対性理論における「因果律」という重要な性質を導く．因果律とは，$(t_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{A}})$ という時空点にいる情報発信者 A が，$(t_{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{B}})$ という別の時空点にいる観測者に情報を伝達できるのは，

$$c^2(t_{\mathrm{A}} - t_{\mathrm{B}})^2 \geq (x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}})^2 \tag{1}$$

かつ

$$t_{\mathrm{A}} < t_{\mathrm{B}} \tag{2}$$

という 2 つの条件を満たしている場合に限ることを意味する．1 つ目の条件は，情報伝達の速さは光の速さを超えられないことを意味し，2 つ目の条件は，情報が過去から未来にしか伝わらないことを意味する．図 1 の A から発信された情報は斜線の中にしか伝わらない．斜線の領域を決めているのは，A から発した光の進む道筋であり，この境界は光的円錐と呼ばれる．図では境界は直線で描かれているが，3 次元空間だと，式 (1) の等号で決まる円錐で与えられる．

2.2 一様加速度運動と因果律

次に加速度運動する観測者 B を考えよう．一様な加速度を受けて運動する観測者は，図 2 の双曲線で与えられる世界線を描く．この絵が意味するのは次のような状況である．右遠方から左向きにやってきた観測者 (B′) は，右向きの加速度をうけ減速し停止した後，今

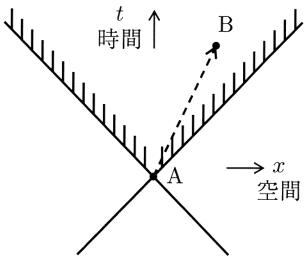


図 1 光速度と因果律.

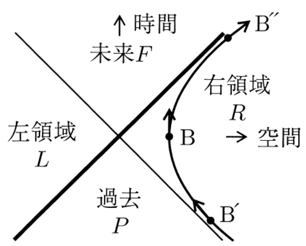


図 2 加速度運動をする人の世界線.

度は右方向へスピードを速め，最終的には光速度で運動する（B″）.

このような観測者 B に対して，情報発信者 A は，時空間のどこにいれば情報を B に伝達することができるであろうか．図 1 を思い出してほしい．相対性理論の因果律によると，情報発信者 A が情報を伝達できるのは，光的円錐の内側のみであり，条件 (1), (2) を満たす場合である．このことから，観測者 B に情報を発信できるのは，A が，図 2 の太線の下側かつ B の世界線のつくる双極線の左側（過去の側）にいるときに限られる．領域 L や領域 F で情報を発信しても，その情報は決して B に伝えることができない．このように，一様加速度運動する観測者にとり，時空には情報を届けることのできる領域とできない領域の「境界」が存在する．このような境界のことを，「事象の地平面 (event horizon)」と呼ぶ．とくに一様加速度運動する人にとっての地平面は，リンドラー地平面と呼ばれる．このような時空の境界（地平面）が存在するのは，相対性理論のもつ因果律のためである．

2.3 重力と因果律

一般相対性理論では，因果律はさらに不思議な現象を引き起こす．アインシュタインは，電磁場の満たすマックスウェル方程式のもつ対称性を調べることで特殊相対性理論に到達した．特殊相対性理論は重力とは相いれないものであった．ニュートンの重力理論は，その力を無限の速さで遠方まで伝える．一方で，特殊相対性理論によると，どんなものも光速度より速く進むことはできない．この矛盾を解決したのが，一般相対性理論である．一般相対性理論では，重力を時空の歪みとして記述する．歪みの伝搬を記述するのがアインシュタイン方程式であり，それは光速度よりも速くは伝わらない．このようにして重力もまた因果律を満たす理論として定式化された．

アインシュタイン方程式は，因果律に矛盾せず重力を記述できるという性質以上の驚くべき性質をもっている．私たちが知っている時空は，どこまでも（ほとんど）平坦であり，そこでの微小な揺らぎが重力となって星の間に働く力となる．このような時空の揺らぎを表す量が，計量

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad (3)$$

である．ここで $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ は，第 0 成分が時間を，残りの 3 成分が空間を表す．特に平坦な時空の計量は

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \sum_i (dx^i)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

と書ける．平坦な時空からの微小なずれを $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ と書くと，$h_{\mu\nu}$ が，私たちの世界のニュートン的な重力相互作用を記述する．アインシュタイン方程式が偉大だったのは，このような微小な時空の揺らぎとしてニュートン重力を記述しただけでなく，激しく曲がった時空も記述する点である．その一つが，膨張する宇宙を記述する解であり，もう一つがブラックホールである．

2.4 ブラックホールと因果律

ブラックホール時空と呼ばれるアインシュタイン方程式の解を発見したのは，シュワルツシルトである．ある質量をもった星の半径が小さくなると，自分自身の重力に耐えられなくなりブラックホールへと崩壊する．シュワルツシルトのブラックホール解は，その質量 M でのみ特徴づけられ，時空計量は

$$ds^2 = f(r)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 d\Omega^2 \qquad (4)$$

で与えられる．ただし，

$$f(r) = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)$$

であり，r は動径方向を，$d\Omega^2$ は 3 次元球面の面要素を表す．G はニュートン定数である．この解は，次のような性質をもつ：

- 性質 1．半径無限大 $r \to \infty$ で平坦な時空に一致

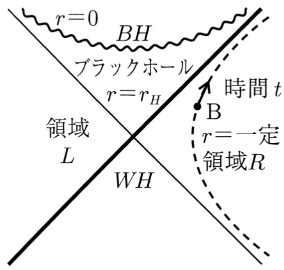


図3 ブラックホールの時空図.

する.

- 性質 2. 原点 $r = 0$ で特異的である.
- 性質 3. 地平面が半径 $r = r_H = 2GM/c^2$ に存在する.

この計量は，一見するとシュワルツシルト半径 r_H で発散し，特異的に振る舞っているように見える．しかし，この発散は地平面で正則に振る舞う座標系を取ることで消去できる見かけの発散である．そのような座標系を使ってブラックホールの時空を表したのが，図3である．この図では，平坦な時空の場合と同様の直観が働くように，光の進む方向（光的円錐）を常に45度の方向にとっている．領域 R が地平面の外側を表し，太線の上部（BH と書いた領域）が地平面の内側を表す．それ以外の領域（L と WH）はこれからの議論には関係ないので無視して構わない.

さて，図3からわかるように $r = r_H$ の面（太線）は45度の方向を向いている．これは地平面が，その上を光が接するように進むことのできる光的超曲面であることを意味している．この絵と図2の類似性に気が付かれたであろうか．$r = r_H$ よりも内側（これをブラックホールの内側という）からどのような情報を発信しても，領域 R，すなわちブラックホールの外側へその情報を伝達することはできない．平坦な時空で一様加速度運動する観測者は，時空の領域（F．L）からの情報を受け取ることができなかった．ブラックホール時空の領域 R に静止している観測者Bの世界線は，図3の双曲線で与えられる．式(4)で与えられる座標系で静止しているにも関わらず，図2の一様加速度運動する観測者と同様の効果をもつのである．図3の太線は，ブラックホールの地平面と呼ばれ，地平面の外側にいる観測者に一切の情報を伝達することのできない時空の境界である．このような「一様加速度運動する観測者」と「ブラックホールで静止している観測者」の等価性は，等価原理（重力と加速度は区別することができない）により保障されている.

ブラックホールの地平面は，ニュートン重力を使って次のように説明される．質量 M，半径 R の天体があるとしよう．この星の表面から，星の重力圏外へロケットで脱出するための脱出速度は

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = c\sqrt{\frac{r_H}{R}} \tag{5}$$

で与えられる．この星の半径がシュワルツシルト半径よりも小さい場合，すなわち $R < r_H$ の場合は，脱出速度が光速度を超えてしまう．このため，地平面 $r = r_H$ の内側から星の重力圏外へ脱出することは不可能となる．(5)は非相対論的な式であり，これに相対論的な因果律を適用することは意味ないが，偶然にも一般相対論の結果と同じ答えを与える.

3. メンブレン・パラダイム—因果律と熱散逸—

2節では，光速度が有限であることから，**情報伝達の境界である地平面**が発生することを見た．地平面を時空の境界と呼ぶ理由は，情報伝達の非対称性にある．地平面の向こう側にいる人は，どのような手段を使っても，こちら側へ情報伝達をすることができない．しかし，こちら側にいる人は，地平面の向こう側へ情報を発信することができる．情報伝達とは，エネルギーの輸送と言い換えてもよい．このような情報伝達，もしくはエネルギー輸送の非対称性が，地平面を特徴づける重要な性質である.

「時空の境界」としての性質をもつ地平面であるが，そこに特別な境界線が引かれているわけではない．例えば，一様加速度運動する観測者にとってのリンドラー地平面は，静止している観測者にとっては何の変哲もない時空にすぎない．ブラックホールの地平面も同様である．ブラックホールへ向かって自由落下している観測者にとって，地平面は特別な意味をもたない．銀河中心にあるような巨大なブラックホールの場合，地平面の半径はとても大きく，そこでの時空の曲率はとても小さい．仮にブラックホールへ落ち込んでいったとしても，いつ地平面を通ったかわからないうちにブラックホールの中へ入り込んでしまうだろう．このように，地平面とは，自由落下するものにとっては何の変哲もない存在にすぎないが，ブラックホールの外側に静止した観測者には，様々な異常現象を引き起こす．ここではまず古典論で何が起こるかを見てみよう.

表 1　ブラックホール時空の観測者と，平坦時空での観測者との対応．

ブラックホール	平坦時空での一様加速度運動
自由落下する観測者（FFO）	静止している人
地平面近くに静止する観測者（FIDO）	一様加速度運動する人

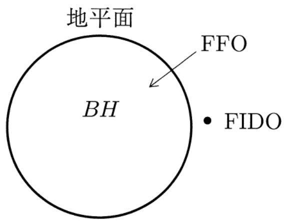


図 4　FIDO と FFO.

3.1 時間反転対称性の破れ

ブラックホールの地平面のごくわずか外側 $r = r_H + \epsilon$ に静止している観測者を考えよう．時空の計量は式 (4) で与えられる．地平面の近くに静止している人（fiducial observer を略して FIDO と呼ばれる）は，ブラックホールからひっぱられる重力に打ち勝って静止している（図 4）．等価原理によると，重力は加速度と等価である．これは図 3 の観測者 B（FIDO）のとる世界線が，図 2 の一様加速度運動している観測者 B と同じであることからもわかる．十分大きなブラックホールに対して，その地平面のごく近傍を見るならば，時空が曲がっている効果はほとんど無視することができる．すると，FIDO は，平坦な時空の中を外向きに一様加速度運動していると考えることもできる．内向きに受ける慣性力が，ブラックホールからうける重力と等価である．

表 1 は，ブラックホールでの観測者を，平坦時空で一様加速度運動する観測者に読み替えたときの対応を表す．

FIDO の位置が地平面に近づくほど，加速度は大きくなり，地平面直上で発散する．このような運動のため，自由落下する観測者（こちらは freely falling observer を略して FFO と呼ばれる）に対して FIDO は大きな外向きの加速度運動を行うこととなる．その結果，FIDO は，FFO に対して，外向きに大きくローレンツ・ブーストされている．

ここでローレンツ変換則を思い出そう．z 方向に速度 v で走っている人の時間と座標 (ct', z') は，止まっている人の時間と座標 (ct, z) に対して

$$\begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix} \tag{6}$$

で与えられる．速度が光速度に近づく極限をとると，時間座標は空間座標に一致して $ct' \to z'$ となる．ここでは座標についてのローレンツ変換を考えたが，同じことはすべての物理量（テンソル量）について言える．例えば，電磁場を考えると，ブーストに直交する方向（x, y 方向）の電場，磁場に対して，

$$c\boldsymbol{E}'_{\parallel} \to \boldsymbol{n_z} \times \boldsymbol{B}'_{\parallel} \tag{7}$$

となる．これから，電磁場のエネルギー運動量の流れを表すポインティング・ベクトル $\boldsymbol{S} \propto \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ を計算すると，常にブーストとは反対の方向（z の負の方向）を向いていることがわかる．

この議論を地平面近くで考えよう．地平面近くで静止する観測者は，自由落下する観測者に対して外向きに大きなブーストを受けている．このため，動径方向に垂直，つまり地平面に接する方向の電場 $c\boldsymbol{E}'_{\parallel}$ と磁場 $\boldsymbol{n_r} \times \boldsymbol{B}'_{\parallel}$ は式 (7) を満たし*1)，電磁場のエネルギー運動量の流れは常に地平面に対して内向き（入射方向）となる．これは**地平面における入射波境界条件**と呼ばれ，電磁場に限らず，すべての場のエネルギー運動量に対して成立する．ブラックホールの地平面は，その内側からはいかなるものも外へ出ることができない時空の境界であることを考えると，入射波境界条件は自然に理解できるだろう．

ブラックホールの外にいる観測者にとって，ブラックホールはエネルギーを吸い込むだけで吐き出すことがない．情報やエネルギーは，ブラックホールへ向かって一方通行にしか流れていないように見える．このためブラックホールは，外部の観測者にとっては，エネルギー散逸を引き起こす吸収体として振る舞う．次の節では，ブラックホールのもつこのような時間反転不

*1)　正確には，動径方向の座標を $dr_* = dr/f(r)$ で定義される tortoise 座標 r_* で表しておく必要がある．この座標系を使うと，質量 0 の波の平面波解は，平坦な時空と同様に $(ct \pm r_*)$ に依存する関数になる．

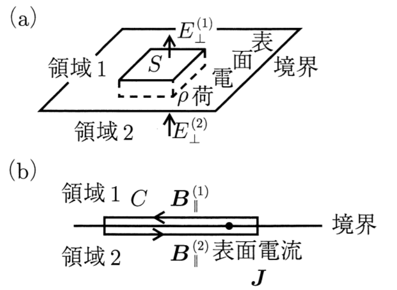


図 5　境界面の両側での電磁場．

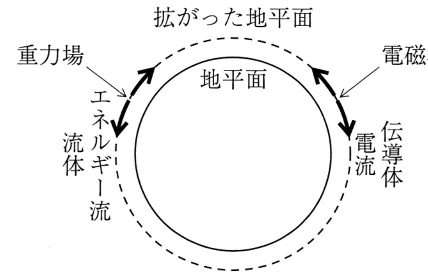


図 6　メンブレン・パラダイム．

変性の破れについて見てみよう．

3.2 電磁場に対する応答

再度，ブラックホールの中での電磁場を考える．地平面は，時空の境界である．そこで境界のある系での電磁場の性質を復習しておこう．図 5 のように，2 つの領域の間に，伝導性をもつ境界面があるとする．マックスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$$

を図 5 (a) のように境界を囲む薄い直方体で積分すると，ガウスの定理から，その表面を突き抜ける電束は表面電荷に比例する．つまり

$$E_\perp^{(1)} = E_\perp^{(2)} + \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{8}$$

が成立する．同様に，

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - c^2 \boldsymbol{E} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

を図 5 (b) のような境界を挟む細い経路 C で積分すると，ストークスの定理から，面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を使って

$$\boldsymbol{B}_\parallel^{(1)} = \boldsymbol{B}_\parallel^{(2)} + \mu_0 \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{n} \tag{9}$$

が成立する．

さてブラックホールの地平面に戻ろう*2)．FIDO にとり，地平面は時空の境界である．しかし FFO にとっては，通常の時空と変わりはない．このため，図 5 のような伝導体としての性質をもつ境界を考えることに意味はなく，地平面の両側の電場や磁場は連続的につながっている．

FIDO の立場はこれとは全く異なる．FIDO にとっては，地平面の内側は全く見えない．つまり地平面の内側の領域はないに等しい．その代わり，時空に境界があるように見える．この境界のことをメンブレン（膜）と呼ぶ．式 (8) や (9) で，領域 2（地平面の内側）の側にある電場や磁場を見ることができないのだから，この電場や磁場をすべて地平面の上の表面電荷や表面電流に押し付けて考えてよいだろう．これがメンブレン・パラダイムの基本的な考え方である（図 6）．その結果，ブラックホールの外部電磁場が与えられると，メンブレンでの表面電荷 ρ や表面電流 $\boldsymbol{J}$ が

$$E_\perp^{(1)} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \boldsymbol{B}_\parallel^{(1)} = \mu_0 \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{n}$$

で決定される．

このような表面電流の定義と，FFO にとっての地平面での物理量の正則性条件（＝入射波境界条件）である式 (7) を使うと，地平面に平行な電場とその上での表面電流の間に，オームの法則

$$\boldsymbol{E}_\parallel = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \boldsymbol{J} \tag{10}$$

が成立することがわかる．伝導体としてのメンブレンの抵抗率は $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377\,\Omega$ となり，これは真空の輻射インピーダンスと同じである．

抵抗は熱散逸を伴う．今考えている系は，曲がった時空の中での電磁場方程式を扱っているに過ぎないのに，なぜ熱散逸が発生するのか．その原因は，地平面のもつ一方方向性にある．地平面は，外からあらゆるエネルギーや情報を吸収するが，それを外部へ返すことをしない．このためブラックホールの外にいる人にとっては，あたかも散逸があるように見えるのである．

メンブレンでの抵抗率はなぜ $377\,\Omega$ になったのか．これは，地平面での「入射波境界条件」を考えると理

*2)　正確には，地平面から微小に外側へずれた「拡がった地平面」(stretched horizon) を考える．これは，地平面直上では，FIDO の加速度が発散し，FIDO という概念そのものが破綻してしまうこと，その結果 FIDO が見る物理量が発散してしまうためである．拡がった地平面を考えることで，有限の物理量を議論することが可能となる．古典的な関係式だけに着目すると，最終的に，地平面への極限をとることができ，どのように正則化するかによらない結果が得られる．

解できる．電磁場は，真空中で輻射のインピーダンス $377\,\Omega$ をもつ．誘電率や透磁率の異なる 2 つの媒質における電磁場の伝搬を考えよう．一般に，2 つの媒質は異なるインピーダンス $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ をもつ．その結果，媒質の境界で波の反射が起こる．もし 2 つの媒質のインピーダンスが等しいと，電磁場の反射がなくなることが知られている．これはインピーダンス整合と呼ばれ，電気回路や音響反射でもよく知られた現象である．地平面の外側から地平面に垂直に入射した電磁場は，地平面での入射波境界条件によりすべてが地平面の内側へと落ち込む．つまり外向きへの反射はない．ブラックホールの外側の真空では輻射のインピーダンスが $377\,\Omega$ なので，外から地平面に垂直に入射した電磁場が反射することなくすべてがメンブレンに吸収されるためには，メンブレンのインピーダンスが同じ $377\,\Omega$ であればよい．すなわち，入射波境界条件は，地平面でのインピーダンス整合と等価である．

3.3 重力に対する応答

同じことを重力波で考えてみよう．重力波も，電磁場と同様に，地平面で**入射波境界条件**が課されている．これは，自由落下する観測者（FFO）にとって地平面は特別な場所ではなく，いかなる物理量も発散してはならない，という正則性の要請である．重力場の運動方程式はアインシュタイン方程式で記述される．電磁場の場合と同様に，境界で表面エネルギー密度や表面運動量密度があると，その両側での重力場の値にはとびが出る．それを記述するのがイスラエルの接続条件と呼ばれる関係式である．イスラエルの接続条件を説明するには，多少の微分幾何学的な知識が必要になるが，基本は電磁場の場合と同じである．図 5 のような境界（時空の中の超曲面）があると，そこで外曲率（extrinsic curvature）と呼ばれる量を定義できる．これは，超曲面の埋め込みの曲がり具合を表す量である．この外曲率 K^{ab} を使うと，イスラエル接続条件は

$$(K^{(1)}h^{ab} - K^{(1)ab}) = (K^{(2)}h^{ab} - K^{(2)ab}) + 8\pi T^{ab} \tag{11}$$

で与えられる．ただし a, b はこの超曲面に接する方向，T^{ab} は面上のエネルギー運動量テンソル，h^{ab} は面上での計量，$K = h_{ab}K^{ab}$ であるが，これらの細かいことはどうでもよい．大事なことは，面の両側で幾何学を決める物理量が，表面のエネルギー運動量によりとびをもつことである．

さて，自由落下する観測者（FFO）にとり，地平面は特別な点ではない．このため，表面エネルギー運動量テンソルのような量を定義することには意味がない．つまり地平面またはメンブレンの両側での重力場の値は連続的につながっている．一方で，地平面近くに静止している観測者（FIDO）にとり，地平面の向こう側からの情報は一切届かない．このため，式 (11) の右辺，領域 2 の外曲率 $K^{(2)ab}$ で書かれた情報は，あたかもメンブレンにあるエネルギー運動量によって担われていると考えることが自然である．これからメンブレン上でのエネルギー運動量テンソル

$$T^{ab} = \frac{1}{8\pi}(Kh^{ab} - K^{ab}) \tag{12}$$

が得られる．

次に課すべき条件が，入射波境界条件である．電磁場の場合と同様に，入射波境界条件を課すと，地平面近くでの FIDO が見る物理量（曲率テンソル）の間に，ある種の関係式が成立する．とくに，重力波を表す横波成分を見ると，地平面が重力波に対する完全吸収体として振る舞っている．

これらの関係式を使うと，電磁場の場合にオームの法則が得られたのと同様に，式 (12) で定義されたメンブレンでのエネルギー運動量テンソルが次のような形に変形できる．

$$T^a_b = \frac{1}{8\pi}\left(-\sigma^a_b + \delta^a_b\left(\frac{\theta}{2} + g\right)\right). \tag{13}$$

ここで，σ^a_b, θ, はメンブレンでの，ずり（shear），膨張（expansion）と呼ばれる時空の幾何学的量を表す．これらは，重力による時空の曲がりによって，そこでの光の束がどの程度捩れるか，またどの程度膨張するのかを表している．g は表面重力であり，FIDO が受ける加速度の大きさである．式 (13) を 2 次元圧縮性流体のエネルギー運動量テンソルと読み替えると，この流体のずり粘性 $\eta = 1/16\pi$ と体積粘性率 $\zeta = -1/16\pi$ が得られる．体積粘性率が負となっているのは，常に引力として働く重力に特徴的な性質であり，膨張や収縮に対する不安定性を意味している[*3]．

メンブレン上で定義されたエネルギー運動量テンソルは，外側から流入する流れも考慮に入れると，全体で保存している．この保存則を書き表したものが，2 次元流体に対する Navier–Stokes 方程式となる．

ブラックホールの外側からエネルギーが地平面に流

*3） このため初期条件を与えて流体方程式を解く場合，解が発散しないような注意が必要になる．

入している状況を考えよう．地平面外側に静止している観測者（FIDO）にとっては，この流入するエネルギーはメンブレンにある仮想的な流体の摩擦によるエネルギー散逸と考えられる．このように，古典的なブラックホールのもつ因果性を，地平面での流体のもつ熱散逸として表現したものがメンブレン・パラダイムと呼ばれる見方であり，重力と流体の対応を与えている．

最後に，最近の反ドジッター時空における重力・流体対応について簡単に述べておこう．この節で議論したのは，ブラックホールの地平面にあるメンブレンでの流体方程式であった．入射波境界条件により時間反転対称性を破り，その結果として散逸をもつ粘性流体の方程式が得られた．重要なのは地平面の性質だけであり，ずり粘性が $1/16\pi$ という値をもつのは，377 Ω の抵抗率の起源であったインピーダンス整合と同様に理解することができる．このメンブレンを地平面から少しずつ離していくと，完全な入射波境界条件が壊れ，外から入ってきた波の一部は反射される．この反射率はブラックホールの吸収係数で決まっているが，反ドジッター時空では，低エネルギーの入射波に対する吸収係数にある種の普遍性があることが知られている．このことから漸近的に反ドジッター時空になるようなブラックホール解の場合には，メンブレンを遠方まで離しても，普遍的な性質をもつ流体描像が得られるのではないかと期待される．地平面近くのメンブレンから無限遠方のメンブレンまでを繰り込み群的な発想でつなごうという研究が最近では盛んになされている．

4. 量子効果―因果律と熱揺らぎ―

3 節では，ブラックホールが完全吸収体である（因果律），という要請からメンブレン上に表面電荷や表面エネルギー運動量が定義でき，それらがオームの法則や Navier–Stokes 方程式を満たすことを見た．ここまでは古典的な方程式（マックスウェル方程式やアインシュタイン方程式）を言い換えたにすぎない．このような古典的な散逸系に，量子効果を取り入れるとどうなるだろうか．以下で，因果律と量子性の織り成す不思議な現象を見てみよう．

4.1 ホーキング輻射

図 3 にあるように，地平面は光的超曲面を作っていて，外側へ向かう波は地平面ぎりぎりを這うようにして進む．一方でブラックホールの内部へ落ち込む波は地平面に直交して内部へと入っていく．一旦内部へ入った波は地平面の外へ出ることができない．これが入射波境界条件をおく物理的な理由である．以下では議論を簡単にするために，図 3 に図示した 2 次元時空を考え，これに直交する残りの 2 次元球面については考えないこととする．

一般に曲がった時空の場の理論（スカラー場，フェルミオン，ゲージ場など何でもよい）は，一般座標変換に対する不変性をもつ．この不変性が保たれている限り，エネルギーや運動量が保存する．一般座標不変性のような基本的対称性は，量子化しても保たれていなくてはならない．物理がどの座標系にいる人から見ても等価でなくてはならないからである．

地平面近くでこれらの場を量子化しよう．ブラックホールへ自由落下する観測者（FFO）にとって地平面は特別な点ではなく，知らないうちに通過してしまう場所である．このため量子化しても一般座標不変性は保たれていて，エネルギー運動量は保存する．

一方で，地平面のすぐ外側にいる観測者（FIDO）にとり，地平面付近はかなり異常な場所である．すべての波は内向き，すなわち図 3 で言うと左向きにしか進まない（入射波境界条件）．このような理論は，カイラルな理論（右向きと左向きが非対称な理論）と呼ばれる．さて，カイラルな場の理論では，一般的に様々な対称性が量子的に破れることが知られていて，**量子異常（アノマリー）**と呼ばれている．一般座標不変性もその一つである．これを重力アノマリーという．地平面付近での入射波境界条件のため理論がカイラルとなり，一般座標不変性，そしてエネルギー運動量の保存則が量子的に破れてしまう．これは大変に困ったことである．これを救ってくれるのがホーキング輻射である．ホーキング輻射があると，地平面から外側へ向かうエネルギー運動量の流れを与える．この余分な流れと，重力アノマリーによる保存則の破れが釣り合って，全体でエネルギー運動量保存則が回復することがわかる．ホーキング輻射によるエネルギー運度量の流れは，プランク分布をもつ有限温度の輻射と考えることができ，この意味でブラックホールは有限温度（これをホーキング温度という）の輻射体と見ることができる．

電荷をもったブラックホールの場合，電流保存則についても同様の議論ができる．この場合は，地平面付近でゲージ対称性が破れて見える．これをゲージアノマリーと呼び，電流保存則が量子的に破れてしまう．これまた大変に困ったことである．これを救うのが，

電荷をもった粒子によるホーキング輻射の効果である．地平面から放出されるホーキング輻射による余分な電流と，ゲージアノマリーによる電流保存則の破れが釣り合って，全体で電流保存則が回復する．

ホーキング輻射は，地平面近くでの量子力学的トンネル効果として理解するのが最も直観的にわかりやすい方法だが，ここで議論したように，光的超曲面という「時空の境界」における量子効果（＝アノマリー）として理解すると，ホーキング輻射のもつ普遍性がより明らかになる．

ここで，参考のため，境界があることにより起こる量子現象のもう一つの興味深い例をあげておく．強磁場中の2次元電子系は量子ホール効果と呼ばれる多体効果を示す．量子ホール状態にある電子系を境界のある有限な領域に閉じ込めると，その境界にはエッジ電流と呼ばれるカイラルな電流が流れることが知られている．ホーキング輻射は，このカイラル電流が発生する機構ととてもよく似ている．量子ホール状態は，境界の内側の電子系だけを考えると，その境界で一見ゲージ対称性を破るように見えることが知られている．しかしもしゲージ対称性が破れてしまえば，電流保存則が破れることとなり，これは明らかに理論のもつ基本的な性質に反している．この電流保存則を回復するのが，カイラルなエッジ電流である．境界にカイラルな状態があると，ゲージ対称性が量子的に破れる．この破れと境界の内側での電流保存則の破れが相殺し，全体で電流保存則が回復する．これは，アノマリー流入原理と呼ばれ，境界のある様々な量子系で起こることが知られている．ホーキング輻射も，因果的な時空境界での量子効果と考えることができ，一種のアノマリー流入原理とみなすことができる．

4.2 メンブレンへの量子補正

ブラックホールは，古典的には散逸を伴う完全吸収体であった．また量子的効果を取り入れると，ホーキング輻射を放出する有限温度の輻射体となる．これらどちらも，地平面のもつ因果的な性質に起因している．有限温度の輻射体であるということは，FIDOは熱揺らぎを受けていることを意味する．このように散逸と熱揺らぎを合わせもつ物理系，というと熱統計力学ではおなじみのブラウン運動がその代表例であろう．

まずブラウン運動について簡単に思い出してみよう．ブラウン運動とは，液体のような微粒子の集まりの中に浮かぶ粒子の運動である．大きなサイズをもつ粒子は，流体の分子が周りからプチプチとあたることで，左や右にランダムな運動をする．またこの粒子の運動は，流体の分子に邪魔されることで粘性をもつ．このように無数の自由度（流体分子）と相互作用している巨視変数（粒子）は，散逸と揺らぎをもち，これらは，「揺動散逸定理」により関係している．このことを最初に発見し，これが原子の存在を決定づけることを示したのがアインシュタインである．

地平面近くに静止している観測者は，ブラウン運動する粒子と同様に散逸と熱揺らぎを感じる．これは地平面のもつ因果性から理解することができたが，これをより微視的な観点から理解することはできないのであろうか．ここでは，地平面近くの無数の自由度がこれらの散逸や熱揺らぎを生み出す起源となっている，という最近の結果について簡単に紹介したい．

FIDOにとり地平面近くは，様々な物理量が発散しているように見える．このため，メンブレン・パラダイムを正確に定式化するためには，地平面からわずかだけ外側へ離れた「拡がった地平面」を考える必要があった．ここで「わずかだけずれた」というのは，r 座標で $r_H+\epsilon$ という意味である．一方で，地平面近くで波の伝搬を議論するのに適した座標系である tortoise 座標系 r_* は，シュワルツシルトの r 座標とは

$$r_* = r + r_H \log\left(\frac{r-r_H}{r_H}\right) \tag{14}$$

で関係している．この座標系だと，地平面は $r_* = -\infty$ で表され，r 座標でほんのわずか地平面から外側へ離れても，r_* 座標では大きくずれることになる．すなわちこの座標系では，地平面と拡がった地平面の間には無数の自由度が存在することになる．この無数の自由度を，ブラウン運動を引き起こす自由度と考えて積分することで，拡がった地平面での散逸や熱揺らぎが正しく導出できることがわかる．つまり，粒子にブラウン運動を引き起こす原因となっている無数の自由度が，地平面近くに凝縮していると考えてもよい．ブラックホールの散逸，熱揺らぎともに地平面のもつ因果性に起因していたのだから，これは自然なことである．

このことは，ブラックホール熱力学の微視的な起源についても，示唆を与える．ブラックホールは，熱力学法則を満たすことが知られている（前田氏の解説を参照）．特に，地平面の面積に比例したエントロピーを持つ．このエントロピーを担う自由度，そして熱力学法則を成立させている微視的な自由度はどこにあるのか．この問題は，これまで多くの素粒子や相対論の研

究者を悩ませてきた．最近では（といってももう10年以上前であるが），超弦理論のソリトン解として知られるDブレインが正しいブラックホールのエントロピーを与えることで脚光を浴びた．しかし，ブラックホールのエントロピーは，地平面の性質と密接に関係しておりその自由度は地平面近くにあると考えるほうがより自然である．

地平面での散逸やホーキング温度をもつ熱揺らぎを，地平面と拡がった地平面の間にある自由度による積分で得られるということは，地平面付近の自由度がブラックホール・エントロピーにも関係していることを示唆している．また，本特集でも解説されているエンタングルメント・エントロピーとの関係も興味深い点である．

5. まとめ

この解説では，因果律を出発点として，地平面での熱散逸と熱揺らぎがどのように発生するのかを見た．因果律という自明な事実から，ブラックホールのもつ熱力学的な性質がいかに自然に（もしくは普遍的に）出てくるかが少しでもわかってもらえれば嬉しい．ここでは，特にブラックホールに着目して熱力学を議論した．本特集でも解説されているように，時空の熱力学的性質はブラックホールに限定されない（例えば福間氏の解説を参照）．因果律という基本的性質と，時空や重力の熱力学的な性質が密接に関係していることがわかっていただけたであろうか．

最後にこのような熱力学的な性質から，どのようにしたら時空の微視的な構造の理解につなげることができるのかを述べてまとめとしたい．

アインシュタインがブラウン運動の理論を提案したのは，原子の実在性を証明したい，という願いのためであった．マックスウェルによる気体の分子論はすでに存在していたが，どうしたら原子の存在をよりはっきりと示すことができるのか，そして熱力学で記述されるマクロな世界と，統計力学で記述されるミクロな世界をどのように結びつけるのか，これを明らかにしたのがアインシュタインのブラウン運動の理論である．熱力学は，そこに含まれるミクロな自由度がとても大きいときに，それらの自由度について平均した物理量に対する関係式を与える．アインシュタインが着目したのは，熱平衡からの揺らぎであった．揺らぎを見ることで，熱平均だけでは見ることのできないミクロな情報を得ることができる．これによりアインシュタインは1モルの物質がもつ原子数，つまりアボガドロ数を測る様々な方法を提案した．アインシュタインのブラウン運動の理論は，揺動散逸定理として花開いた．さらに最近では，平衡系のまわりの揺らぎだけでなく，非平衡過程の周りの揺らぎについても多くのことが知られるようになっている．その代表は，「非平衡揺らぎの定理」と呼ばれる．これは微視的な系における（ミクロな意味での）エントロピー変化の増大確率と減少確率の比を与え，さらにこれから熱力学第二法則を“証明”することができる．

熱力学があれば，その背後には必ず微視的な世界が広がっているのだろうか．ブラックホールの熱力学は，その背後に時空の微視的な構造があることを意味しているのか．このような問に答えるためには，アインシュタインがブラウン運動に着目したように，時空の熱力学そのものではなく，そこからの揺らぎを見ることが重要になる．ブラックホールの情報喪失問題などダイナミカルな問題に答えるためには，熱平衡状態を見るだけでは不十分である．そこで，「非平衡」ということになるのだが，非平衡といっても範囲は広い．まずは，アインシュタインが考えたように，熱揺らぎを調べることで，マクロとミクロをつなぐヒントを得ることが大事であろう．ブラウン運動の理論から100年経つ．今から100年経ったとき，時空の微視的構造について，人類は何を理解しているのであろうか．

最後に，この原稿を読み有意義なコメントをしてくれた総研大生の岡澤晋さんと嶼田健吾さんに感謝する．

参考文献

1) メンブレンパラダイムは次の論文 R. Price, K. Thorne, *Phys. Rev. D***33** (1986) 915 で与えられた．また本 K. Thorne, R. Price, D. Macdonald, *Black holes: the membrane paradigm*, Yale University Press, USA (1986) もあるが手に入れにくい．
2) 量子異常によるホーキング輻射の導出は，S. Robinson, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 011303 と S. Iso, H. Umetsu, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 151302 で与えられた．
3) 地平面付近の自由度の積分から熱散逸と熱揺らぎが出せることと，ブラックホール系への非平衡ゆらぎの定理の応用は，S. Iso, S. Okazawa, S. Zhang, arXiv:1008.1184 と S. Iso, S. Okazawa, arXiv:1104.2461（*Nucl. Phys. B* 印刷中）を参照．

（いそ・さとし，高エネルギー加速器研究機構）

宇宙とエントロピー



白水 徹也

1. エントロピーと時間の矢

宇宙とエントロピーと言われて気になるのが宇宙の時間の向きと熱力学的な意味での時間の向きとの関係であろう*1)．後者は「時間の矢」と通常呼ばれている．一度放たれた矢は戻ってはこないことに模してのことである．

さて，「時間の矢」とは何だったか．これは熱力学法則の一つであるエントロピー増大法則そのものから得られる．この法則に従えば，系はエントロピーが増大する方向に発展する．この発展を「時間の矢」と呼ぶのである．しかし，長時間系を追えば，統計的にはごくごくまれであるがエントロピーが下がる場合もあるであろう．そこでは実際の時間と「時間の矢」が逆行することになる．実は私たちの宇宙はこのごくごくまれなエントロピーの低い状態から始まったようである．

2. 宇宙の初期条件と時間の矢

Penrose に従って少し詳しく眺めてみよう[1]．まず重力を考慮する必要があるであろう．物質は自身の圧力で広がる傾向があるが，それに対して重力は引力で収縮させる傾向がある．大きな物質においては重力が卓越し，重力収縮が起き，極端な場合ブラックホールが形成される．よって，系としては大きな一つのブラックホールが存在する宇宙がエントロピー最大のものとして期待されるであろう．そこで，実際に私たちが観測する一様等方な宇宙の（輻射が担っている）エントロピー S と，仮にそのエネルギー分のブラックホールが存在したとして，そのエントロピー $S_{\rm BH}$ とを比較してみると，私たちの宇宙のエントロピーは $S=10^{-35}S_{\rm BH}$ ととても小さいことがわかる*2)．この低いエントロピーの状態が私たちの宇宙における「時間の矢」の起源であると Penrose は考えたのである．ダイナミクスの観点からもっともらしい大きなブラックホールが存在する状態から宇宙は始まらなかったのである．いずれにせよ，観測からは宇宙は「時間の矢」の方向に時間発展してきているようである．

では私たちの宇宙はなぜそのようなごくごくまれな初期条件から始まったのであろうか．この疑問は普通の物理の問題では気にすることはない．つまり，あらゆる可能な初期条件を通常は許すからである．実験結果と，法則や理論を支配する方程式の予言を比較するのであるが，実験結果を説明する初期条件があればよいわけである．しかし，私たちが観測する宇宙は一つしかないから話がややこしい．初期条件が気になるのである．初期条件が違ったらどうなるのであろうか．私たちは生まれたのだろうか．現代宇宙論ではビッグバン宇

*1) エントロピーとは考えている系の状態数から定義され，状態数が多いほどエントロピーは大きな値をとるようになっている．

*2) ここでブラックホールのエントロピーが面積で決まるという事実を使っている．興味深いことに，ブラックホールのエントロピー増大則（面積増大則）は，Hawking によってあるもっともらしい条件下で証明されている！

宙の前に加速的膨張インフレーションが起きたと考えられている．そこに解決策は潜んでいないであろうか．

3. インフレーションの初期条件？

インフレーション理論は素粒子物理学の発展とともに1980年代に登場した．それはビッグバン宇宙の初期条件を自然に与えてくれると考えられている．また，宇宙膨張，軽元素の起源，宇宙の背景輻射など輝かしい成功を収めたビッグバン宇宙論には地平線問題，平坦性問題などの問題があったが，これらを一挙に解決する．

インフレーションの典型的な模型は，スカラー場によって説明される．あるポテンシャル中をゆっくり転がるスカラー場があれば，その期間中ポテンシャルのエネルギーによって宇宙は加速的膨張を遂げることになる．しかし，インフレーションがいつまでも続けばよいというわけではない．宇宙が急激に膨張すれば温度はゼロに近づくのであるが，熱いビッグバン宇宙に橋渡しをするためにはいつか終わらなければならない．終わり方の詳細に目をつぶると，興味深いのは，広い初期条件の範囲で，持続期間に大小はあるものの指数関数的膨張を行う点である．もちろん観測からは，この持続時間に制限がついているので，勝手な初期条件や持続時間が許されるわけではない．では，そのインフレーションの初期条件は何が決めているのか？

納得いくかどうかは個人差があるかもしれないが，インフレーションの初期条件についてよくとられる代表的な考え方は，次のようなものである．スカラー場は相関距離を超えた大きなスケールでは，様々な値をとるであろう．都合のよい値をとるものもあれば，とらないようなものもあるであろう．都合のよい値をとるところでは，そこの空間が指数関数的に膨張し，私たちはその空間を私たちの宇宙とみなすことができる．観測しない他の空間ではインフレーションが起きていない領域も存在する．しかし，そのような領域は観測できないのであるから，気にしなくてもよい．さて，これで満足できる説明になっているのであろうか？その他にもインフレーションの初期条件を量子宇宙論によって説明する試みがなされたが，量子重力が完成していない現時点では予言能力がないと言わざるを得ない．

4. 超弦理論の宇宙観？

超弦理論に従えば，余分な次元のコンパクト化の仕方によって様々な低エネルギーの宇宙があると考えられている．異なる宇宙における粒子間の相互作用の大きさなどは，互いに異なっていてもよい．私たちの観測する世界がすべてではないのである．ここまでくると初期条件だけでなくいろいろな問題が気になる．どうして次元は4なのか？などなど素朴な疑問は尽きない．私たちはごくごくまれな宇宙に住んでいるような印象を受けてしまう．超弦理論はそれらの疑問に応じてくれないような素振りを見せている．次元や相互作用の大きさが変われば，私たち人類は存在できなくなってしまう．これが究極理論が最近予言する宇宙観である．しかし，何か見落としはないのであろうか．これを認めると，誉れ高い超弦理論の傷とならないであろうか．この種の問題に対する見解はいまのところ研究者の間で収束しておらず，人によってまちまちであるが，素朴な疑問への人類の挑戦はまだまだ続きそうである．

参考文献

1) Penroseに限らず幅広いこの種の議論がコンパクトにまとめられているものとして，例えばA. Albrecht, in *Science and Ultimate Reality: From Quantum to Cosmos* edited by J.D. Barrow, P.C.W. Davies, and C.L. Harper (Cambridge University Press, 2004).

（しろみず・てつや，京都大学大学院理学研究科）

数学は燃えているか



しみずともこ・山下純一共著，四六判，396 頁，本体 3200 円，現代数学社

標題からして迫力のある，ユニークな本である．内容は，超初心者でも気楽に読めそうな小話から，かなり知識のある人が興味を持ちそうなハイレベルな話題まで，幅広く選ばれている．

最初に，全体の「狙い」がわかる「はじめに」を見ておこう．「はじめに」の副題は

《異界の数学》との出会い

になっているが，「静的」と捉えられやすい学校数学に対して，《異界の数学》の意義が説かれる．いろいろなところに見られる異界の数学と接触することによって，感受性をリセットすれば，新しい視点から（本当の）数学の実像を見ることができる．そのために数学の様々な貌，すなわち数理科学，物理数学，純粋数学，レクリエーション数学から「数学史」まで含めて，いろいろな観点から「数学は燃えている」ことを眺めてみよう――これが著者の意図（の，評者による下手な要約）である．

内容は次の 4 部に分けられている．括弧内はその部分のページ数であるが，ページ数の配分から「感受性のリセット」と「遊び心」に重点が置かれていることが分かる．

第一部　感受性をリセットする（118 ページ）．

ここは「純粋数学ルネサンス」というかなりハイレベルな論考から始まり，

「夢見る数学」に萌える，
時代精神としての数理科学，
数学の全体像が知りたい

など 16 項目が並んでいる．全体を通して，現代数学の現況・動向を鑑賞できるが，

数学の賞の動向，
ライブ講演

など，初心者向きの軽い話も入っている．

第二部　遊び心の数学（123 ページ）．

ここはタイトル通り「遊び」と言う感じで

宮沢賢治の四次元幻想，
円周率と世界記録，
最遠の富士，
おみくじ，
数学用語と人名，
数学者の生誕記念と没後記念

など 23 項目があり，どれも読みやすい．

第三部　数学を生きる（89 ページ）．

ここは数学者の列伝であるが，重要項目はヴェイユ（35 ページ），次がフェルマー（11 ページ）で，あとは 2 ないし 4 ページがペレルマン，ウィッテンとワイルズ，ペンローズ，ナッシュ，ボーチャーズ，ガウス，グリーン，ラマヌジャン，トム，ホーキングに割り当てられている．他に「数学的能力を見る」，（指の長さでわかる，と言う話），「天才と数学」（天才少女と天才少年のお話）がある．いくつかの項目（特にヴェイユの一部）には非常に難しいが，読み物として楽しめる部分も多い．

第四部　過去からのこだま（49 ページ）．

ここは数学史から，

コーツとオイラーの公式
数学とパターンの科学，
科学史と旅行，
アルキメデスと組合せ論

など，また古代数学史の片鱗ともいえる

数え方

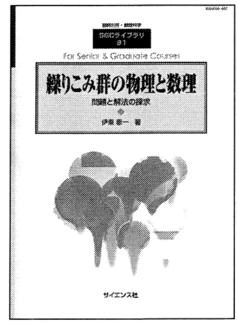
が入っていて，どれも読みやすく書かれている．

もともとは雑誌『ベーシック数学』，『理系への数学』に連載していたしみずともこ氏の記事をまとめ，それに山下純一氏の追加項目を加えて，4 つの部に分け，再編集した，とのことであるが，2 人の個性がそれぞれ生きていて，補い合って全体が構成されているように感じた．私とは趣味が違うが，力作だと思う．数学が好きな方々，数学教育に携わる方々だけでなく，過去の数学教育に傷つけられた方々にも，何かしら感銘を与えてくれるのではないだろうか．

野崎　昭弘

繰りこみ群の物理と数理

問題と解法の探求



伊東恵一著，B5 判，160 頁，本体 2190 円，サイエンス社

本書は，数学的に厳密なくりこみ群を用いて数理物理学の様々な問題を研究してきた著者による，くりこみ群に関するモノグラフである．

くりこみ群は，多自由度系の解析に非常に有効な解析手法で，物理学の様々な分野で重要な成果を挙げてきた．くりこみ群の考え方（ものの見方）は明快で，我々の統計力学や場の理論などの理解を深めるのに大きく貢献した．その効果は非常に大きく，今では統計力学や場の理論の理解にはくりこみ群の見方が不可欠と思えるほどである．

そのように考え方は非常に明解なくりこみ群であるが，具体的な問題の解決には「くりこみ変換」とよばれる変換を遂行する必要がある．くりこみ変換の遂行にはかなりの計算を要し，すべての計算を厳密に遂行できることは稀である．そのため通常の物理の文献では（深い物理的直感に基づいた）大胆な近似を行ってくりこみ変換の結果を計算（推測）し，そこから物理的結論を引き出すことが多い（もちろん，「大胆な近似」が間違っていることもあり得る）．

一方，すべてを数学的に厳密に解析するには気の遠くなるような量の計算と独創的なアイディアが要求される．そのため，これまでに厳密なくりこみ変換が遂行された非自明な問題は多くない．また，このような事情からか，くりこみ群の厳密な解析に関する書物は驚くほど少ない．これはくりこみ群の有効性を考えるとき，大きな損失である．このような状況の中での本書の存在意義は大きい．

本書の特徴は，その題材の選び方にある．本書は，厳密なくりこみ群が大きな成功を収めた分野（統計力学における臨界現象の解析）には軽く触れるにとどめ，その大半を著者が研究してきた未解決問題（とその関連問題）に割いている．そのため，本書は初心者向けとはいいがたいが，くりこみ群についてある程度の知識のある読者には興味深い話題の宝庫となった．

第一章では，統計力学におけるスピン系に対するくりこみ群が解説されている．著者は簡単化されたモデル（階層モデル）を用いて，くりこみ変換を厳密に行う際の基本的な考え方を説明しているが，この試みは成功している．ここで示された基本的な考え方は以後の章でも繰り返し，現れる．

第 2 章，第 3 章，第 4 章では，シュレーディンガー方程式の固有値問題，乱流に関する Sinai と Li の論文，多様体における Ricci flow の考え方という，一見，くりこみ群とは無関係に思える話題を，くりこみ群の立場から眺めている．このような取り組みは他にあまり例がなく，評者は興味深く読んだ．

第 5 章と第 6 章が著者の真骨頂といえるだろう．第 6 章ではクォークの閉じ込め問題を，第 5 章ではそれに密接に関連した 2 次元非線形シグマ模型の問題を，くりこみ群の手法で解析する試みが述べられている．共に非常な難問であり（クォークの閉じ込め問題はクレイ研究所のミレニアム問題の一つ），最終的な解決は示されないが，著者のこれまでの苦闘が赤裸々に語られていて迫力がある．他の研究者がこれらの問題に取り組む際のヒントもふんだんに含まれているし，なにより，著者の不屈の姿勢に感銘を受ける．

このように，本書はくりこみ群についての非常に面白い本であるが，標準的な教科書ではない．特に，どのようにくりこみ変換を遂行するかに重点を置くあまり，くりこみ変換の結果を使って物理的結論を導く過程やモデルの背景などが，予備知識のない読者にわかりにくくなってしまった印象を受ける．その意味で，扱われている問題やくりこみ群について予備知識のない方は，まずは他の書（本書の参考文献を参照．また江沢，渡辺，鈴木，田崎共著「くりこみ群の方法」の 3,4 章も優れた解説である）で基本的なアイディアを身につけると良いだろう．そのあとで本書を読めば，厳密なくりこみ変換を如何に遂行するか，くりこみ群はこのような問題にも使えるのか，現在どのような未解決問題があるのか，など多くの重要な刺激を受けることができるだろう．

本書により，多自由度系の重要な未解決問題に果敢に挑戦する方々が増えることを期待する．

原　隆（九州大学大学院数理学研究院）

科学と社会
Science & Society

第1回 国家・学問・戦争の諸相

科学とは何か

岡本 拓司

1.1 はじめに

今回から十数回にわたって，19 世紀後半から 20 世紀前半にかけての日本で起きた出来事を中心に，科学と社会の関わりについて考えるための話題を提供していくこととしたい．科学と社会の関わりとは漠然とした言い方であるが，具体的にどのような側面を検討するかは，取り上げる事例に即して変化させていくこととする．既に明治の頃から，科学と社会の間では多様な問題が生じていたことや，それらを経て現在の科学と社会の関係が成り立っていることを了解していただければ幸いである．私自身の能力や，現段階での研究の状況によって，取り上げることのできる話題にはおのずと制限が生ずるが，特に意識して扱わない領域を設けるようなことはないようにしたい．

科学と社会の関わりであれば，現代のほうが多種多様な材料が見つかるのではないかと思われるかもしれない．一面ではそうであるが，現在進行中の出来事の場合は，結末が分からないために事態の全体像が不明であり，充分な検討ができないことも多い．過去の出来事であっても，実態が解明されていないものも多いが，直近の場合よりもやや客観的に眺めることは可能である．そこから得られた理解は，現在の問題を考える上でも有益であろう．また，つい 70 年前までの日本は，現在とは異なった法律や制度から成り立っており，過去の事例を扱えば，違った状況の中で科学がどのような出来事を惹き起こすのかを見ることができるという利点もある．特に戦争との関わりは現在よりはるかに密接であり，適切な話題を選べば，いまではあまり意識されなくなった科学の側面を知る手がかりを得ることもできる．現代においても，日本を離れれば，科学と戦争との関わりは当然のようにして現れる話題であり，過去の日本の事例を知れば，そうした実態を把握するための何らかの感覚を養うことができるかもしれない．

副題には国家，学問，戦争を並べた．国家を入れたのは，明治維新から敗戦までの日本では，それ以前以後と比べて，国家の比重が高く，科学との関わりにおいても注目したいと考えたためである．学問を入れたのは，科学の学問としての性格を特に検討したいと考えたためである．通常よく使われる「科学技術」という言葉では，この点が無視されがちである．戦争を入れたのは，既述の通り，注目する時期においては，日本および世界各国で，国家の行う事業の中で戦争の比重が大きく，科学と社会の関わりにもその影響が見られるためである．各回で常に 3 つの要素が現れるわけではないが，全体としては，これらの要素の関わりを，

科学と社会の接点の中に見ていくことになる．

「科学技術」に関連して言えば，社会と密接な関わりをもつのは科学というよりむしろ技術であり，これが副題にも含まれないのを訝しく思われるかもしれない．国家や社会が科学にまず期待するのは，実際，産業や軍事における技術的応用である．多くの人々の関心も，学問としての科学ではなく，これに基づいて利用可能になる具体的な技術であろう．しかし，現実には，知識や学問としての科学自体が社会と直接関わりをもつ局面は，技術が社会と関わる領域とは別に，あるいはそれと重なりをもちつつ，存在する．この点については，抽象的に論ずるのではなく，以後具体的な事例を取り上げながら示すこととしたい．また反面，科学は，その成り立ちの特殊性から，技術とは深い関わりをもっている．いままで述べたこととは一見矛盾するように思われるが，科学と社会の関わりを論ずる際には，多くの場面で技術についても取り上げることになる．この点についても，具体例を見ながら検討することとしたい．

さて，今回と次回は，具体的な事例を取り上げる前に，その準備として，科学とは何であり（今回），どのように成立したか（次回）を検討しておきたい．どちらも数十冊の本を費やしても論じきれない重大な課題であり，1 回ずつ割り振って充分な議論ができるわけではないが，一方で，どちらも，科学と社会の関わりを議論しようという際に，無視して済ませることのできる話題でもない．十全な検討が尽くせるわけではないが，以後の議論に必要な範囲で，今回は科学の特徴を，次回はその成立の過程を，見ていきたい．

1.2 科学という言葉

今までは特に定義もせずに科学という語を用いてきたが，まずこれを検討したい．科学という言葉は，漠然と自然科学を指すものとして使われることがある．一方で，自然科学とは別に，社会科学や人文科学という言葉もある．ただし，例えば社会科学に含まれる経済学や社会学を個別に取り出してみると，それらを科学（の一分野）と呼ぶ習慣は，広くは定着していないように思われる．人文科学に含まれる哲学や歴史学を科学と呼ぶのも適切ではないように感じられる．それらの領域に携わっている人々，例えば哲学者や歴史の研究者を科学者と呼ぶことも普通はない．従って，科学という語で自然科学のみを指し，人文科学・社会科学を含めない，また科学者という語で自然科学に携わる人々のみを指し，哲学者や社会学者を含めないのは自然な選択であるように思われる．

言葉の使い方の説明としてはこれでよいが，ではなぜ人文科学・社会科学という言葉が作られ現在も使われているのかが不思議にも思われる．この点をもう少し検討しておく．

歴史や哲学の研究者であっても，自分たちの活動を「科学」の語で表現することがある．例えば「科学研究費補助金」，通称「科研費」という，学術研究一般のための競争的資金に応募したりこれを受領したりする場合がそうであり，このときは歴史研究でも科学研究と呼ばれる．あるいは，日本学術会議という，日本にあるほとんどすべての学問領域から研究者が参加して運営している機関があるが，その憲章（「日本学術会議憲章」）の最初の一文は，「科学は人類が共有する学術的な知識と技術の体系であり，科学者の研究活動はこの知的資産の外延的な拡張と内包的な充実・深化に関わっている」というものである．会議には哲学者も社会学者も参加しているが，そこでは学術と技術（実際は工学・農学などの研究領域）の全体を指して科学と呼び，携わる人々すべてを科学者と呼ぶ．哲学者も社会学者もここでは科学者である．

以上の「科学」の用例は，いずれも公的な性格をもつ制度や機関に関わるものであり，科学技術基本法などの法律で定められているために，通常とはやや異なる意味でこの語が使われている．しかし，法律といえども通例と全く異なる意味で言葉が採用されるわけではない．科学という語が現在の意味で日本に定着するのは明治期であるが，それ以後も，人文・社会系の領域も含めて西洋由来であれば科学と呼ぶことがあり，また学術全体を

「人文科学及び自然科学」と称したこともあった[1]．

より積極的に，人文・社会系分野も，科学になるべきであると考えられた時期もあった．第二次大戦での敗北は科学戦での敗北と理解されることがあったが，研究に従事する人々の中にも科学的精神振興のための組織の設立に向う動きがあり，1946年の民主主義科学者協会（民科）の誕生に結実した．民科には，哲学から自然科学に至る領域の研究者や技術者が参加し，一時は会員数が11,000人を越えるほどの大きな勢力を誇った．民科に当初設けられた研究部は，哲学・政治経済・自然科学・歴史・芸術・教育・農業の7つに分けられたが，これらが総称されるときには科学の語が使われ，個々の分野の研究に従事する人々は社会科学者・自然科学者・技術者・教育者と呼ばれた[2]．

自然科学と人文・社会系の研究領域，さらに工学・農学等を含めて総称するのに相応しい言葉は，学問であろう．学問の中に，科学と人文・社会系の領域，および工学や農学などがあると言って特に混乱はなく，歴史学や哲学を科学，歴史や哲学の研究者を科学者と呼ぶ語法は定着していないように思われる．しかし，科研費・学術会議・民科の場合のように，学問全体を科学と呼ぼうとする傾向もあり，その場合には，特に民科の場合に顕著なように，（自然）科学以外の学問の領域も，（自然）科学のようになることが望ましいという価値判断が働いているようである．

以上は日本語についての議論であったが，外国ではどうか．近代の日本に学問の枠組みを提供した西欧についてみてみよう．英語やフランス語では，日本語の学問に相当する語としては，それぞれで意味はやや異なるが，サイエンスやシアンスが用いられる．一方で，これらの語を科学と訳すこともある．あえてたとえれば，日本に学問という語が存在せず，科学という語のみがある状態ということになる．自然科学を指すつもりでサイエンスやシアンスという言葉を使っても問題はないが，他の学問分野を集合的に指し示したい場合は，ソーシャル・サイエンス（シアンス・ソシアル，社会科学）やヒューマニティーズ（ユマニテ，人文学）などの語を用いる．つまり，名称上，自然科学とそれ以外という区分も必要な事情は，日本の場合と変わらない．また，例えば英語で，歴史学や哲学をサイエンス，これらの分野の研究者をサイエンティストと呼ぶことはほとんどない．一方で，ドイツ語のように学問（ヴィッセンシャフト）という語の方が一般的な場合には，（自然）科学を指す語には，これに「自然」の語を補ったナトゥーアヴィッセンシャフトが用いられる．

総合して言えば，西欧語でも，自然科学・社会科学・人文科学などを総合して呼ぶ語が必要な場合もあれば，自然科学のみ，人文・社会系の学問のみを別の名称で呼ぶ習慣もあるということになる．日本語の学問に相当する領域は存在しているが，そのすべてを自然科学と同じものと看做すのはやはり不自然なのであろう．なお，ドイツ語では個別の学問分野をファッハヴィッセンシャフトと呼ぶが，これは日本語の科学の語源（学問の個別分野を指す「一科の学」）に似ている[3]．

一方で，学問全体を科学に倣ったものにしようという動きがあった点も，日本と同様である．ただし，西洋ではこの動きが起こったのは遥かに古く，啓蒙主義の時代であり，模範とされたのは17世紀末に成立したニュートン力学やその方法に倣って作られた数理科学であった．「科学的である」という言葉に，正確，厳密，客観的，普遍的等の良い意味があり，自然科学以外の学問分野の成果を肯定的に指す場合にもこの表現が用いられることがあるが，これに似た感覚は西洋にもあった（現在，ことによると科学の地位が低下しており，この言い方に実感が持てない可能性があるかもしれないが，そのときには，逆に「科学的ではない」と評された場合にどのように感ずるか想像してみるとよいかもしれない）．また，そうした肯定的な意味をもつ科学の模範は，やはり自然科学，とりわけニュートン力学であった．この意味でも科学の語を自然科学を指すものに限定して用いるのは適切であろう．しかし，啓蒙主義を経て諸領域がその性格を変えながらも，哲学や歴史学などは，言葉の使い方から見る限り，模範とされた自然科学と

同じものと看做されるようにはならなかった．日本の場合には，啓蒙主義を経た学問を西洋から移入したが，第二次大戦後に再び科学に倣って改革しようとする動きがあったことになる．それでも，学問全体が自然科学と同様になることはなく，自然科学とそれ以外の領域との間の区別は残った．

なお，科学史のような分野では，陰陽五行説のように，現代の科学と同列には扱えない対象であっても，例えば中国科学史という分野に含めて検討する．この場合は，科学という言葉で，自然に関する議論や自然の理解の形態一般を指す．

1.3 科学とはどのような学問か

以上の議論は言葉に関するものであったが，ここから，科学は学問の一つであり，学問の中にはそれ以外に人文・社会系の領域があり，さらにその中に哲学，歴史学，政治学，経済学などが存在すると理解してよいということになる．そうすると，科学とはどのようなものかという問いを，もう少し進んで，科学とはどのような学問であるかという問いに変えることができる．こう問うと，実は，従来考えられてきた問題が幾つか解決できたことになる．あるいは，従来検討されてきた問題に特定の態度をとることになる．そのうち特に重要な問題は，科学と技術の関係である．技術といってもこの語の意味は広いので，具体的にはここでは軍事技術や産業技術，通信技術，あるいは身近にある料理，裁縫などの技術を問題としている．そこで，自然科学を科学と言い換えたように，必要に応じてこれらを技術と言い換えよう．

科学哲学，科学論のような分野では，科学とは何かという問題は，科学と技術はどう異なるかという問題を含むものとして取り扱われることがある．これに対し，科学とはどのような学問かと問うてしまえば，技術は普通は学問であるとは理解されていないので，科学と技術の違いという課題は解決されているように見える．簡単に言えば，科学は学問であるが技術はそうではないということになる．ただしそれでも，技術は科学の応用であるという主張もあり，また学問の中にも，技術的成果を挙げることを目標とする工学・農学・薬学のような分野，あるいは技術的成果と言い切ることはできないがその要素を持つものを目指す医学のような分野もあり，疑問の生ずる余地はある．そうした疑問も重要なので，ここでは，さしあたり，科学は学問の中で技術と特別な関係にある分野であることを確認し，詳しくは先の関連する箇所で改めて議論することとしよう．

さて，科学はどのような学問であるかと問うと，却って問題を複雑にしたような感覚も生ずる．学問とは何であるかをまず考えなければならないからである．しかし，学問と日本語で呼ばれるものが，洋の東西を問わず，また古くから存在したことは多くの人々が知っている．この範囲で，学問とは何であるのか考えてみる．

学問とはまず何かについての主張と，それを論証したり説得したりする手続きを含む．説得や論証には様々な手段が用いられるが，これは主張するに足る材料を見つけるための手段でもある．例えば歴史学では，資料（史料）が論証の基本であり，その一方で調査の材料でもある．哲学では，従来の研究の積み重ねや自分自身の思索がこれに相当する．社会学や心理学では例えばアンケートという方法で情報を収集するが，この結果が説得にも調査にも使われる．もちろん，多くの学問で手段を共有することもある．論理的な議論の展開はどの分野でも必須である．数学も物理学や経済学で用いられる．しかし，歴史学における文書史料，考古学における遺物・遺構など，多くの場合，その分野を強く特徴づける調査の対象と調査の手段がある．それらは，その分野の研究対象と密接に結びついている．では科学を特徴づける手段とはどのようなものか．

科学の中の議論は論理的であるといわれることがある．しかし，論理学の単位をとることは科学者になるための条件ではなく，議論の論理性は先輩や同僚との対話や，学会での討論などの中で培われる．この程度の論理性は，立場を異にする多くの人々からも挑戦を受けることが前提の他の学

問にも必要であり，科学の特徴というよりは，現代の学問全般の特徴であろう．論理的でないと言われれば，科学的でないといわれるよりも強く侮蔑されたことになりそうである．

科学が数学を多用する点が信頼性に結びついているとも言われる．たしかに物理学などではそうであるが，他の分野ではそれほど数学が使われるわけではなく，将来，数学による記述が進むと予想されているわけでもない．また，数学を使う領域は，経済学の一部など他にもある．

方法において残る大きな特徴は，実験であろう．後述するように実験と観測は異なるが，観測も含めてもよいかもしれない．物理学のように理論研究と実験研究が分かれている分野もあり，その場合に理論研究は実験研究などなくとも進むかのようにも思われるが，実際には，実験から得られた情報が理論研究の材料であり，また理論研究の結果は実験が可能であれば検証にかけられる．化学や生物学では，実験を行わない理論研究者はまだ数が少なく，実験が方法の主流である．

1.4 実験という方法

実験とは何か．実験が学問の方法であるとすると，これは調査や論証・説得に用いられるということになる．ただし，調査の結果，何らかの主張の発見に至る事情は明らかではなく，外から見て確定できるのは，実験が論証・説得のために使われるという点である．実験が論証・説得のために使えるとすると，そのためにはどのような条件が必要か．

まず，実験が行われる様々な条件がある．当人がやればうまくいくが，他の人物ではうまくいかないのでは，論証には使えない．多くの実験は，素人が突然試みると失敗するが，ある程度習熟すれば誰でも，たとえ主張の内容に疑問をもつ人物であっても，うまく行うことができるという実験でなければ，説得に用いることはできない．これは，あえて言えば客観性を保証しているともいえる．実験を行う人物の他，実験を行う場所，時間などの条件を変えても，同じ結果が成り立つことも必要である．これは普遍性を保証しているともいえる．また，うまくいくとは，当人が出したものと同じ結果が出るということである．条件を変えても同じ結果が出るというわけであるから，これは再現性を保証している．つまり，論証や説得に用いることのできる実験とは，条件を変えて同じ結果を出す振舞いのことである．これがなぜ説得や論証に用いることができるかといえば，疑う相手

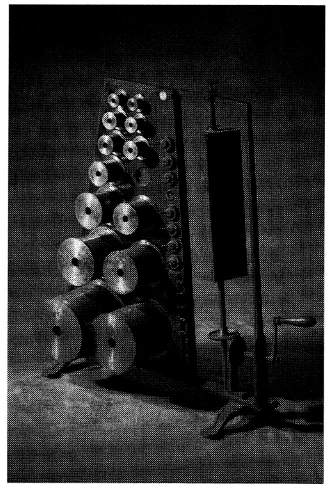


図 1.1　音響分析機（東京大学駒場博物館蔵）．パリのルドルフ・ケーニッヒが 1890 年代に製作したものと思われる．ある音が発せられると，固有の振動数をもつ共鳴器が振動し，それらの振動がガスの炎に伝わることで音が視覚化される．

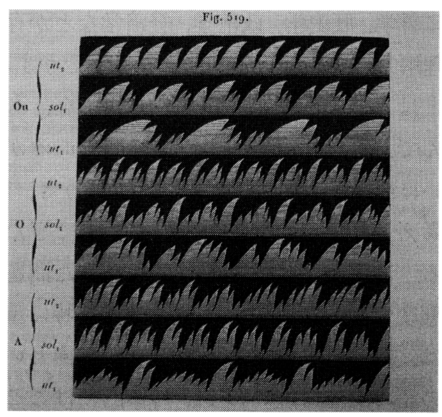


図 1.2　音響分析機で観察した母音．J. Jamin, *Cours de physique de l'École polytechnique*, 2e éd., t. 2, Paris, Gauthier–Villars, 1868, 所収．

に対してやり方を教え，何度やっても，いつやっても，どこでやっても同じ結果になるからやってみよということができるためである．

さらに，実験の特徴は，実行の際の条件を変えられる点にある．場所や人物を変えても良いように，注目に値しないその他の条件も変えてよい．出てくる結果のうち，何を「同じ」であると看做すかは，実験をする側が決めてよい．温度や気圧が異なれば具体的な実験結果は異なる可能性があるが，その場合は，測定できる量の間のやや抽象的な関係が「同じ」であると考えればよい．何が「同じ」かは，論証したい内容によって，恣意的にも見える形で決められる．注目したいものを「同じ」とし，それ以外の条件を変えても「同じ」結果が出ることを確認すればよいのである．

また，条件を変えて，出てくる結果の変化を見ることができる点が実験の特徴である．その点が実は観測や観察との違いである．例えば肉眼による天体の観測を考えてみれば分かるとおり，観測では対象に手を加えることは想定されていない．対象に手を加えて観測すれば，それは実験である．単なる観測であっても，観測されるものではなく，観測する自分の位置を変えるなどして条件を変えることができるが，多くの実験では，それ以上，つまり観測されるものにも手を加え得ることが想定されている．操作的であるといえようか．また，原因を変えて結果の違いを見るという点から，因果的ともいえる[4]．天体観測の場合でも，肉眼ではなく望遠鏡で行う場合のように，観測される天体には手を加えることはできないが，倍率を変えて見えるものが変わるようにできるものもある．天体には手が加えられないが，操作的・因果的ではあるという点で，実験に極めて近い．

論証と説得に用いる方法は，発見の方法にも用いられる．ただし，複雑な法則などの場合は，あらかじめそれが成り立つことを想定した上で，実験で確かめる場合もある．しかし，現在であれば，とりあえず何かの測定をして見て，その上でデータを入力すると，何らかの数学的な関係が成り立たないかどうかを探してくれるプログラムも存在するらしい．実際の発見に至る過程としては，見込みがある場合も，見込みなしで実験を繰り返す場合も，ある程度の見込みを立てて実験をしながら修正していくという場合もあり得る．

1.5 実験と帰納法

実験という方法の特徴についてもう少し検討しよう．まず，実験による論証の根拠を考えてみよう．

昨日も朝起きたら夜が明けており，今日も同じように夜が明けており，それどころかいままで毎日そうであったから，明日も同様であるといわれれば説得されそうであるが，これは，条件を変えて同じことが成り立つことを示そうとしている点で，実験に近いようにも思われる．ただし，実験の場合は，もう少し勝手に変えられる条件がある．

他にも，世の中全般の繰り返し起きることを取り出して，次にも同じことが起きるだろうと考える例はある．というより，日常生活のほとんどはそのような経験から成り立っている．毎日が新しい経験に満ちているのはすばらしいが，それでは疲れる．今日家を出る際に使った鍵は，通常は帰ったときにも使えるとたいていは考えている．ただし，家に帰って鍵を使おうとしたところ，ドアが開かないということもないわけではない．今朝の喧嘩で怒った家人が，あろうことか鍵を変えたというような場合である．つまり，繰り返すことに慣れるのは，個人にとっても人間の集団にとっても重要なことであるが，反面，同じことが繰り返すという思い込みはいつも正しいとは限らない．

もちろん，鍵が変えられないというのは，同じことが成り立つための重要な条件なので，それが満たされなかったために見込んだ結果が出なかったわけである．同じことが繰り返すための条件が整っていなかったために，見込んだ結果とはならなかったのである．条件が同じであれば，やはり同じことが繰り返されると考えてよい．しかし，この種の経験は，重要なことに気づかせてくれる．過去に同じことが繰り返したからといって，次も同じことが起こると決めてかかるのは，単なる思

い込みでしかないのではないか．鍵が使えなかったのは鍵が変えられていたためであるが，そもそも鍵が変えられていなくとも，いままで同じことが繰り返したから，また次も同様になるということに，保証はあるのか．

より一般的に言えば，1000 回繰り返し同じことが起こったからといって，1001 回目が同じになると判断する根拠にはならないのではないか，ということである．たしかにならない．この問題は，近代に入って以降のヒュームの検討から数えても 200 年以上の間，多くの哲学者が検討してきたが，こうした推論（帰納法）には，論理的に言えば，根拠がないという結論には揺らぎがない[5]．しかし，そうであったとしても，世の中では，1000 回も繰り返したことは 1001 回目も繰り返すと考えてそれほど問題は生じない．多くの人々はそう考えることに慣れており，それに従っておおよそ問題はない．1000 回繰り返したので 1001 回目もそうなる，と説得されると，哲学者であっても専門を離れれば，納得せざるを得ない．ある程度の人間の集団が，地球上で生き残っていくためには，繰り返し起こることが何か了解して，それに慣れて生活を組み立てていかなければならない．つまり，社会では広く，帰納法は用いられており，科学のみならず多くの学問が採用している．なお，このように，学問の中で行われる説得や論証も，その原理は学問の外の社会に由来している．

学問では，ただし，もう少し手の込んだことをする．同じことが繰り返す理由を，理論的に説明する．例えば，明朝も同じように夜が明けるのは地球が太陽の周りを回っているからであるというような説明をする．しかし，地球が太陽の周りを回っているという理論が正しいということを論証するためには，結局は帰納法を使うことになる．もっともらしい理論を立てて説明するにしても，その理論の論証の過程で帰納法が用いられる．それでも，地球が太陽の周りを回っているからであると知れば，明朝も夜が明けるだろうと思っているというだけの状態より，賢くなれることは間違いない．このあたりが，学問が得意とする精緻化や体系化の意義である．

1.6 実験と技術

さて，実験には操作性・因果性がある点が特徴的であるが，社会一般にあるこれに近いものは何であろうか．物を作ったり加工したり，動かしたり壊したりといった，いわゆる技術がそうであろう．漠然と技術といっても曖昧であるが，既述の通り，軍事技術・産業技術であり，料理・裁縫などを指すと考えよう．これらは確かに実験に近い．対象に手を加え，望む通りの同じ結果が出るように条件を整える，あるいは条件を変えると何が生まれるかを確認して，場合によってはそれをまた他の目的に使うなど，技術が目指すところと実験が向うところには共通点が多い．自分の求めるものが繰り返せばよく，何を求めるかは自分が決めればよい点も共通する．また，技術が確立する際にも，帰納法が前提とされる．

実験の場合は，学問のための材料を得ることが目的であるため，軍事技術・産業技術等では必要にならないものであっても，ときに自発的に開発する必要に迫られることがある．科学研究そのものに大きな資源が投入される社会では，科学研究のための技術開発も行われる．そうでない場合は，産業や軍事，あるいは娯楽，そして研究自体を目的と小さな工夫などの進展により，繰り返し可能な操作が確立される領域が広がっていくにつれて，科学が対象とする領域が拡大する．

現代では科学が技術を生み出すのが通常であると考えられているかもしれないが，19 世紀半ばくらいまでは，科学が技術の発展の恩恵を受けることのほうが多かった．また，実験が学問への貢献を目的にするのに対し，技術は産業・軍事・娯楽その他多様な目的のために存在するのであり，両者の目的，あるいは科学と技術の目的は，異なっている．ただし，19 世紀後半以降，科学の成果が技術に還元される例，特に電気技術や化学技術などが目覚しい成功を収め，科学が技術を生むという言い方に説得力が生まれるようになった．その

反面，科学研究のために特化した技術を開発して用いることも行われるようになり，1930年代後半以降にはその営みが拡大して，いわゆる巨大科学を生んだ．

1.7 実験が行うこと

実験が技術に近いものであることを見たが，両者の目的は異なり，実際に果たす役割も異なる．実験の場合は，学問のために使い得る情報を得ることが主目的である．

注目する対象に関わるものを測定して，数字の情報を得るというのは，実験の典型である．長さ，重さ，時間といった量であれば，どの文明圏に属していようが，何語を話そうが，カトリックであろうがプロテスタントであろうが，信ずるものや抱いている自然観に関わらず測定でき，その結果が数字で現れるのであるから，あとは数学を使って議論ができる．この方法で論証ができれば，その議論は，立場を異にする人々からの批判にも耐え得るであろう．つまり，実験の強みが発揮されるのは，まず，対象とする現象から，繰り返し可能な形で数字が取り出せる場合であるといえる．対象から数字を取り出すことが容易でない場合もある．そのときには対象に手を加える．必要に応じて，温度という量を発明するなど，数字の取り出し方も新たに考案されることがある．

数量化できなくとも，目で見て確認できれば済む場合もある．視覚化，可視化である．望遠鏡，顕微鏡はこれを行う機器であり，顕微鏡で見るものはさらに固定したり切片にしたりして，つまり対象に手を加えて，見たいものが見えるようにする．多くの場合，可視化できれば原理的に数値化できることになるが，可視化のみで充分な場合もある．

可視化といっても，原理的に可視光の範囲では見ることのできない対象もある．その場合には，電子顕微鏡を使ったり，エックス線による散乱現象を使ったりして何らかの画像を得ようとする．実際に対象が肉眼で見えることはないのであるが，対象を検討するために，人間が目で見える情報を用いるのである．

実験とは，つまり，人々の批判に耐える論証に用いる情報を，繰り返し可能な操作によって得ることである．現代では，研究の先端にある実験は，誰にでも容易に手が届くものではなく，建設や維持の費用が膨大にかかるために同様の機器が世界に数例存在するのみであるようなもの（巨大な粒子加速器や，スーパー・カミオカンデのような観測機器など）や，企業内研究所で開発され特許などが関わるために公開されないものもある．これらの場合には，多くの人々が実験を繰り返して結果を確認することは容易ではないため，機器を構成する諸要素への信頼や，建設・維持や実験の遂行を担当している研究者への信頼が，発表される成果の普遍性・再現性・客観性等を保証している．ただし，そうした信頼を逆手にとって，成果の捏造が行われることもある[6]．

今回は，やや抽象的に，科学を特徴づける方法が実験であることを見た．次回は具体的な歴史に沿って，実験を方法とする学問が確立していく過程を検討することとしたい．

参考文献

1) 鈴木淳『科学技術政策』，山川出版社，2010年．
2) 柘植秀臣『民科と私　戦後一科学者の歩み』，勁草書房，1980年．
3) 科学の語源については，次を参照のこと．周程「「科学」の中日源流考」，「思想」，1046号，2011年6月，112–136ページ．
4) Davis Baird, *Thing Knowledge: A Philosophy of Scientific Instruments*, Berkeley: University of California Press, 2004〔松浦俊輔訳『物のかたちをした知識：実験機器の哲学』，青土社，2005年〕．
5) Samir Okasha, *Philosophy of Science: A Very Short Introduction*, Oxford; Tokyo: Oxford University Press, 2002〔廣瀬覚訳『科学哲学』，岩波書店，2008年〕．
6) 村松秀『論文捏造』，中央公論新社，2006年．

（おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科）

情報幾何の新展開
脳と情報の数理科学

第9回

微分幾何学早わかり (1)

接空間をつなげば曲がった空間が復元する

甘利 俊一

微分幾何とは曲がった空間を扱う数学である．古来，空間は真っすぐで，そこではユークリッド幾何が成立するとされていた．ユークリッド幾何の公理の一つである平行線公理を証明しようという努力に端を発して，空間はもしかしたら曲がっているのではないかと疑う人々が現れた．地球のような球面を考えれば，これは 2 次元の曲がった面，曲面である．

こうしたことから，リーマンは教授就任講演で，一般の曲がった空間を取り扱うリーマン空間を提唱した．後に，現実の時空間は 4 次元の曲がった空間と捉えるべきことが，アインシュタインの相対性理論で明らかになる．

時空のみならず，対象物の集まりをまとめて空間として考えて研究すると，その全貌がよくわかる．そのときの強力な方法が微分幾何である．しかし困ったことに，微分幾何は数学者が数学として作って整備したため，とりつきにくい難解なものになってしまった．しかし，その本質は線形代数を知っていれば十分に理解できる．3 回かけて，誰にでもわかる楽しい微分幾何入門を示したい．

9.1 リーマン空間

n 次元多様体 S とは，ひらたく言えば n 次元ユークリッド空間を曲げたりねじったりしたようなものである．したがって，各点は n 次元の座標系 $\boldsymbol{\xi} = \left(\xi^1, \cdots, \xi^n\right)$ を用いて指定できる．ただ，一つの座標系を用いて S のすべてを覆うことはできないかもしれない．

多様体は一般に曲がっている．そこで，一点 $\boldsymbol{\xi}$ の近傍で多様体を線形近似してみよう．すなわち，座標系に沿って，座標軸 ξ_i の接線方向をベクトル $\boldsymbol{e}_i$ で表し，n 個のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の張る線形空間 $T_{\boldsymbol{\xi}}$ を考える．これを多様体 S の，点 $\boldsymbol{\xi}$ における接空間と言う（図 9.1）．

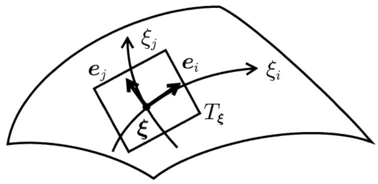


図 9.1　接空間 $T_{\boldsymbol{\xi}}$.

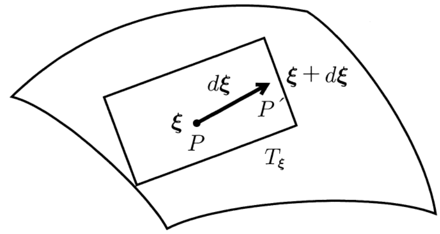


図 9.2　接空間のベクトル.

多様体のきわめて近い 2 点 P と P' を考え，その座標を $\boldsymbol{\xi}$ と $\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi}$ とする．P から P' へ向かう微小な線素は，線形近似では接空間 $T_{\boldsymbol{\xi}}$ のベクトルと考えてよい（図 9.2）．この線素を

$$dP = \overrightarrow{PP'} = \sum d\xi^i \boldsymbol{e}_i \tag{9.1}$$

と書く．さて，上式の $\sum d\xi^i \boldsymbol{e}_i$ で，間違って $\sum$ を落として $d\xi^i \boldsymbol{e}_i$ と書いてしまったとしよう．でも，読者はみな，うっかりして $\sum$ を付け忘れたなと考えるだろう．そうならば，$\sum$ なんか付けなくても良い，そのほうが式がすっきりする．こういうサボリの精神は大切である．これは私が言うのではなく，Einstein が言った．

Einstein の簡約和法：数式の項の中で，同じ添字が一つは上に，もう一つは下に現れるとき，これらについては記号 $\sum$ を省略しても自動的に和を取るものとする．

接空間 $T_{\boldsymbol{\xi}}$ に内積を導入しよう．基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}_j$ の内積を

$$g_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle \tag{9.2}$$

のように書く．これは点 $\boldsymbol{\xi}$ に依存してよい．こうすれば，接空間 $T_{\boldsymbol{\xi}}$ の 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{A} = A^i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{B} = B^j \boldsymbol{e}_j \tag{9.3}$$

の内積は

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = A^i B^j g_{ij} \tag{9.4}$$

のように成分を用いて書ける．Einstein の簡約和法に従って $\sum$ を省いていることに注意．これを通常のベクトル–行列記法で書くと $\boldsymbol{A}^T G \boldsymbol{B}$ のようになり，縦ベクトルか横ベクトルか，転置記号をどこに置くかなど，わずらわしい．成分で書くのをテンソル記法という．これは $A^i g_{ij} B^j$ のように順序をどこに取ってもよいので楽である．

ベクトル $\boldsymbol{X} = X^i \boldsymbol{e}_i$ の長さの二乗は

$$\|\boldsymbol{X}\|^2 = g_{ij} X^i X^j \tag{9.5}$$

であるから，微小な線素 $d\boldsymbol{\xi}$ の長さの二乗は

$$ds^2 = \langle d\boldsymbol{\xi}, d\boldsymbol{\xi} \rangle = g_{ij} d\xi^i d\xi^j. \tag{9.6}$$

$T_{\boldsymbol{\xi}}$ は線形空間，とくに内積の定義されたユークリッド空間であり，基底系 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ が一般には正規直交系ではなくて，その内積が (9.2) で与えられる．

一般に微小線素 $d\boldsymbol{\xi}$ の長さの二乗が (9.6) で与えられる空間をリーマン空間と呼ぶ．確率分布族の空間は，不変性の原理に基づくと，自動的に Fisher 情報行列 g_{ij} をリーマン計量とするリーマン空間になる．$g_{ij}(\boldsymbol{\xi})$ は場所 $\boldsymbol{\xi}$ ごとに違って良いから，リーマン空間はユークリッド空間を少しずつ曲げながら滑らかにつないだものと考えてよい．

9.2 座標変換とテンソル

空間 S の座標系は何を取っても良いはずである．いま座標系を $\boldsymbol{\xi}$ から $\boldsymbol{\zeta}$ へ次の変換で変えてみよう．

$$\zeta^\kappa = \zeta^\kappa(\boldsymbol{\xi}), \quad \kappa = 1, \cdots, n. \tag{9.7}$$

逆変換は $\xi^i = \xi^i(\boldsymbol{\zeta})$ と書ける．ここで座標系 $\boldsymbol{\zeta}$ に関しては添字を i, j, k とは違って κ, λ などを使うと，添字だけでどの座標系を用いているかがわかる．ここにこの記法の妙味がある*1)．このとき新しい座標軸 ζ^κ に沿った接線ベクトルは前とは違うから，このベクトルを $\boldsymbol{e}_\kappa$ と書こう．添字の違いでどの座標系での話かわかる．2 点 P と $P + dP$ を考え，それぞれの座標を 2 つの座標系で表したときに，$\boldsymbol{\xi}$ と $\boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}$ および $\boldsymbol{\zeta}$ と $\boldsymbol{\zeta} + d\boldsymbol{\zeta}$ であったとしよう．P と $P + dP$ を結ぶ微小線素ベクトル dP を 2 つの座標系で表すと

$$\overrightarrow{dP} = d\xi^i \boldsymbol{e}_i = d\zeta^\kappa \boldsymbol{e}_\kappa, \tag{9.8}$$

しかるに，座標変換 (9.7) から，

$$d\zeta^\kappa = \frac{\partial \zeta^\kappa}{\partial \xi^i} d\xi^i \tag{9.9}$$

である．ここで，座標変換の行列

$$A_i^\kappa = \frac{\partial \zeta^\kappa}{\partial \xi^i}, \tag{9.10}$$

その逆行列

$$A_\kappa^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \zeta^\kappa} \tag{9.11}$$

を導入しよう．同じ文字 A を用いているが，添字 i, κ が上にあるか下にあるかで意味が違う．$\left(A_\kappa^i\right)$ と $\left(A_i^\kappa\right)$ は互に逆行列である．これより，座標を変えて得られる 2 つの基底ベクトルは

*1) これは，J.A. Schouten が古典的な微分幾何の名著『Ricci Calculus』で用いた．その後の微分幾何の流儀は，座標系を軽んじて使わないいわゆる "coordinate free" の方向に進んで，この記法がすたれたのは残念である．

$$\boldsymbol{e}_\kappa = A^i_\kappa \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{e}_i = A^\kappa_i \boldsymbol{e}_\kappa \tag{9.12}$$

のような関係にあることが分かる．

新しい座標系 (ζ^κ) でのリーマン計量行列は

$$g_{\kappa\lambda} = \langle \boldsymbol{e}_\kappa, \boldsymbol{e}_\lambda \rangle = \left\langle A^i_\kappa \boldsymbol{e}_i, A^j_\lambda \boldsymbol{e}_j \right\rangle \tag{9.13}$$

だから，これは前のものと

$$g_{\kappa\lambda} = A^i_\kappa A^j_\lambda g_{ij} \tag{9.14}$$

の関係で結ばれている．もちろん $\overrightarrow{dP}$ の長さはどちらの座標系で測っても同じである．座標を変えると座標変換の行列 A^i_κ や A^λ_j などを用いて (9.14) のように表現が変わる，g_{ij} のように添字がいくつか付いた量をテンソルと言う．あとから曲率テンソル R_{ijkl} などが出てくるが，添字 i が下にあれば，A^i_κ を掛け，上にあれば A^κ_i を掛けて，i を κ に変換する．κ から i への変換も同様のルールである．添字が一つしかないテンソルがベクトルと呼ばれる．計量 g_{ij} は添字が 2 個（つまり行列）で，リーマンテンソルと呼ばれる．念のため，線素 $\overrightarrow{dP}$ の長さは

$$g_{\kappa\lambda} d\zeta^\kappa d\zeta^\lambda = A^i_\kappa A^j_\lambda g_{ij} d\zeta^\kappa d\zeta^\lambda = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \tag{9.15}$$

となり，どの座標で計っても同じである．

ユークリッド空間では，正規直交座標系をとれば計量行列はどこでも

$$g_{ij} = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij} \tag{9.16}$$

であり，単位行列である．微小な線素の距離の二乗は

$$ds^2 = \delta_{ij} d\xi^i d\xi^j = \sum \left(d\xi^i\right)^2 \tag{9.17}$$

となり，ピタゴラスの定理で書ける．ユークリッド空間は曲がっていないから，計量はどの場所でも同じで，この座標系ならば微小でなくても，距離の二乗が成分の二乗和で書けた．

さて，リーマン計量行列が座標の変換によって (9.14) で変わるのだから，うまい座標系を選んで g_{ij} をどこでも単位行列にすることができないだろうか．たしかに，一点 $\boldsymbol{\xi}$ を固定すれば，いつでもうまい変換行列 A^i_κ を選んで，$g_{\kappa\lambda}$ を単位行列にすることができる．しかし，これがどの点でも単位行列になるように座標変換の関数 (9.7) を選び，点 $\boldsymbol{\zeta}$ によらずに

$$g_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{\zeta}) = \delta_{\kappa\lambda} \tag{9.18}$$

とできるかどうかである．これができるならば，ユークリッド空間である．

例えば，2 次元の球面を考えよう．これは曲がっていてリーマン空間である．だから，どのような座標系を取っても，すべての場所で $g_{ij} = \delta_{ij}$ とすることはできない．つまり，地球の地図を平面に画いて，長さが実物に比例するよう

にはできない．だから，地図を作る専門家は苦労するのである．

空間が本質的に曲がっていてユークリッド空間であるかどうかは，$g_{\kappa\lambda}(\boldsymbol{\zeta}) = \delta_{\kappa\lambda}$ となる座標系 $\boldsymbol{\zeta}$ があるかどうかで決まる．この条件を

$$\delta_{\kappa\lambda} = A^i_\kappa A^j_\lambda g_{ij} \tag{9.19}$$

で決まる (9.11) 式の A^i_κ に関する微分方程式と見れば，これに $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\xi})$ という解があるかどうかは積分可能条件で判定できる．これを書いていくと，4 階（添字を 4 個持つ）テンソル $\boldsymbol{R}_{ijkl}$ が現れる（後述）．これがリーマンクリストッフェル曲率テンソルと呼ばれるテンソル量であって，これが 0 ならば空間はユークリッド的である．つまり座標を変えればユークリッド空間の正規直交系が得られる．これが 0 でなければ，空間は本質的に曲がっていて，リーマン的である．確率分布空間の多くはこの意味で本質的に曲がっている．

9.3 アファイン接続

リーマン空間は一般に本質的に曲がっている．だから，各点で接空間を考えても，それはあくまで線形近似であって，それらはばらばらのままである．接空間を（曲げながら）つないでいけば，元の空間が復元できる．どのようにつなぐか，これを決めるのが接続である．

微小に近い 2 点 P と $P' = P + dP$ をとり，その座標を $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}$ とする．2 つの点における接空間 T_P （$T_{\boldsymbol{\xi}}$ と書いてもよい）と $T_{P'}$（これは $T_{\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi}}$）は微妙に違っている．座標軸方向のそれぞれの接線ベクトル（基底ベクトル）を

$$\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\xi}) \in T_P, \quad \boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi}) \in T_{P'} \tag{9.20}$$

とする．$\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}'_i$ はともに同じ座標系に沿ったベクトルだから，似ているだろう．ただ，$\boldsymbol{e}'_i$ は $T_{P'}$ のベクトルであって T_P のベクトルではないから，これを直ちに T_P のベクトル $\boldsymbol{e}_i$ と比べることはできない（図 9.3）．

接続とは，$T_{P'}$ のベクトルを T_P のベクトルに写してみることである．これができれば，接空間 $T_{P'}$ と接空間 T_P との間に対応関係ができて，両者がつながる．こうして各点をつないでいけば，元の空間 M の全体性を回復できる．

$T_{P'}$ の基底ベクトル $\boldsymbol{e}'_i$ を T_P へ写そう．写したものを $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ とする．これは $\boldsymbol{e}_i$ に近いから $\tilde{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{e}_i + d\boldsymbol{e}_i$ と書ける（図 9.3）．この写し方が線形であると

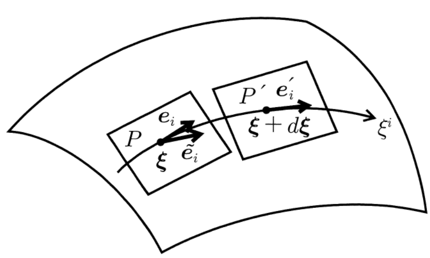


図 9.3　$T_{P'}$ のベクトル $\boldsymbol{e}'_i$ を T_P に移して $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ とする．

き，これをアファイン接続と言う．$\boldsymbol{d e}_i$ を T_P の基底ベクトルを使って成分で書くと

$$\boldsymbol{d e}_i = \left(d e_i^k\right) \boldsymbol{e}_k \tag{9.21}$$

となるだろう．微小な線素 $d\boldsymbol{\xi}$ が 0 になれば $\boldsymbol{e}_i'$ は $\boldsymbol{e}_i$ に一致するから，両者の違いの de_i^k は線形近似で $d\boldsymbol{\xi}$ に比例している．そこで係数 Γ_{ji}^k を用いれば，$de_i^k = \Gamma_{ji}^k d\xi^j$ のように書ける．

ベクトルで書けば

$$\boldsymbol{d e}_i = \Gamma_{ji}^k d\xi^j \boldsymbol{e}_k \tag{9.22}$$

のようになる．これで $T_{P'}$ を T_P につなぐことができた．ここに現れた 3 つのインデックスを持つ量 Γ_{ji}^k を，接続の係数と言う．これはテンソルではないので座標変換に関して (9.14) のような方式では変わらず，少し面倒な式になる．ここで触れるのは止め，後に変換式を示す．

Γ_{ji}^k を求めるには，(9.22) で $\boldsymbol{d e}_i$ と $\boldsymbol{e}_m$ の内積を取ればよい．

$$\langle \boldsymbol{d e}_i, \boldsymbol{e}_m \rangle = \Gamma_{ji}^k g_{mk} d\xi^j \tag{9.23}$$

となる．そこで

$$\Gamma_{jik} = \Gamma_{ji}^m g_{mk} \tag{9.24}$$

と置く．これは Γ_{ij}^k をすべての添字を下にして表したものである．実は計量テンソル g_{ij} を用いて，(9.24) のように上の添字を下に降ろせる．逆に (g_{ij}) の逆行列 $\left(g^{ij}\right)$ を用いて上に挙げることもでき，

$$\Gamma_{ji}^m = \Gamma_{jik} g^{mk}. \tag{9.25}$$

9.4 測地線

接続が定まれば，“真っすぐな線” として測地線を定義できる．いま，パラメータ t で定義される曲線

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t) \tag{9.26}$$

を考えよう．$\boldsymbol{\xi}(t)$ 点での曲線の接線は，d/dt を $\dot{}$ を用いて表すとして，

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \dot{\xi}^i(t) \boldsymbol{e}_i(t) \tag{9.27}$$

であり，$\boldsymbol{\xi}(t+dt)$ 点での接線は

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t+dt) = \dot{\xi}^i(t+dt) \boldsymbol{e}_i(t+dt) \tag{9.28}$$

である．2 つの接線ベクトルは異なる接空間に属する．しかし，接続によって $T_{\boldsymbol{\xi}(t+dt)}$ のベクトル $\dot{\boldsymbol{\xi}}(t+dt)$ を $T_{\boldsymbol{\xi}(t)}$ のベクトルに移せば，2 つの接線方向が

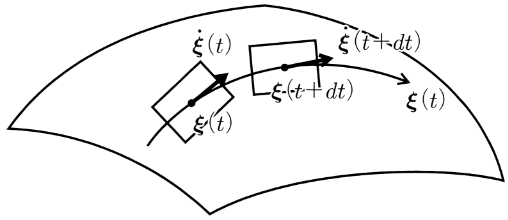


図 9.4 測地線 $\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) \sim \dot{\boldsymbol{\xi}}(t+dt)$.

比較できる（図 9.4）．両者が同じならば，この曲線は "向きを変えない" 線である．これを測地線と呼ぶ．

$T_{\boldsymbol{\xi}(t+dt)}$ での接ベクトル $\dot{\boldsymbol{\xi}}(t+dt)$ は，$T_{\boldsymbol{\xi}(t)}$ では

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t+dt) = \left(\dot{\xi}^i + \ddot{\xi}^i dt\right)\left(\boldsymbol{e}_i(t) + d\boldsymbol{e}_i\right) \tag{9.29}$$

$$\approx \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) + \left\{\ddot{\xi}^i(t) + \Gamma^i_{jk}\dot{\xi}^j\dot{\xi}^k\right\} dt\boldsymbol{e}_i \tag{9.30}$$

に対応する．両者が同じであるには，$\boldsymbol{\xi}(t)$ が方程式

$$\ddot{\xi}^i(t) + \Gamma^i_{jk}\dot{\xi}^j(t)\dot{\xi}^k(t) = 0 \tag{9.31}$$

を満たさなければならない．これを測地線の方程式と言う．パラメータ t を $\tau = \tau(t)$ に変えれば，接線ベクトルの大きさは変わる．方向だけにこだわるならば，測地線の方程式は

$$\ddot{\xi}^i(t) + \Gamma^i_{jk}(\boldsymbol{\xi})\dot{\xi}^j\dot{\xi}^k = c(t)\dot{\xi}^i \tag{9.32}$$

でもよい．しかし，パラメータ t をうまく選べば，測地線はいつも (9.31) の形に書けるから (9.31) を用いよう．

ここでは，リーマン計量とアファイン接続を切り離して議論してきた．測地線の定義を，"2 点間を結ぶ最短の曲線" とすることもできる．こうすると，リーマン空間の計量 g_{ij} から，測地線 (9.32) が最短路線になるようにするアファイン接続が自動的に定まる．通常の教科書ではこれを採用し，接続の係数がリーマン計量から

$$\Gamma^k_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} g^{km}\left\{\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{ij} - \partial_m g_{ij}\right\} \tag{9.33}$$

で与えられるとする．この接続をリーマン接続または Levi–Civita 接続と言う．しかし，他の接続も可能である．Einstein は電磁気と重力を統合する統一場理論を作ろうとして，捩率テンソル（トーションテンソル）を導入し，これをリーマン接続に加えて空間を豊富化した．しかし，Einstein の統一場理論は失敗した．捩率は面白い量であって，電気回転機械の力学や，塑性材料の力学など工学で使われて効果を発揮した．ゲージ変換などの考えもここから生まれた．

9.5 ベクトルの平行移動

基底ベクトル $\{\boldsymbol{e}_i\}$ と $\{\boldsymbol{e}'_i\} = \{\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\xi} + d\boldsymbol{\xi})\}$ の間に対応がつけば，一般のベ

クトル $\boldsymbol{A} \in T_{\boldsymbol{\xi}}$ と $\boldsymbol{A}' \in T_{\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi}}$ の対応もつく．いま，曲線 $\boldsymbol{\xi}(t)$ を考えて，曲線に沿って各点 $\boldsymbol{\xi}(t)$ で接空間のベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ が定義されているとしよう．成分で書いて，

$$\boldsymbol{A}(t) = A^i(t)\boldsymbol{e}_i(t), \quad \boldsymbol{A}_{(t+dt)} = A^i(t+dt)\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi}) \tag{9.34}$$

である．$\boldsymbol{A}'$ を $\boldsymbol{A}$ に移したとき，両者が同じになるとしよう．その条件は，

$$\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{e}_i + d\boldsymbol{e}_i \tag{9.35}$$

を用いて，2 次の微小項を無視して，$A^i(t+dt) = A^i(t) + dA^i$ を用いれば

$$dA^i = \Gamma^i_{jk} d\xi^j A^k. \tag{9.36}$$

“隣り合った” 接空間 $T_{\boldsymbol{\xi}}$ と $T_{\boldsymbol{\xi}+d\boldsymbol{\xi}}$ の間の接続はこれでよい（図 9.5）．これを $\boldsymbol{\xi}(t)$ に沿ってさらに長距離につないでいくことができる．離れた 2 点 P と Q とを曲線 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t)$ でつなぐとする．$P = \boldsymbol{\xi}(0), Q = \boldsymbol{\xi}(1)$ とする．いま，P 点の接空間にあるベクトル $\boldsymbol{A} = A^i\boldsymbol{e}_i(0)$ を考え，これを曲線 $\boldsymbol{\xi}(t)$ に沿って移し，曲線上で $\boldsymbol{A}(t) = A^i(t)\boldsymbol{e}_i(t)$ を定義しよう．このとき，$\boldsymbol{A}(t+dt)$ と $\boldsymbol{A}(t)$ は接続によって同じものに写るようにする．すると $\boldsymbol{A}(0)$ は Q 点でのベクトル $\boldsymbol{A}(1)$ に移すことができる．このために，曲線 $\boldsymbol{\xi}(t)$ に沿った各点での接空間をずらっとつないで考えて，$\boldsymbol{\xi}(t)$ 点での $\boldsymbol{A}$ をこれと少し離れた $\boldsymbol{\xi}(t+dt)$ 点に移し，これをさらにその隣の点の接ベクトルに移すというように，順に移していく．いま，$\boldsymbol{\xi}(t)$ での $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}(t)$ とすると，これを $\boldsymbol{\xi}(t+dt) = \boldsymbol{\xi}(t) + d\boldsymbol{\xi}$ に移すには

$$\boldsymbol{A}(t+dt) = \boldsymbol{A}(t) + d\boldsymbol{A}(t) \tag{9.37}$$

とすれば，$d\boldsymbol{A}(t)$ を (9.36) 式で定めればよい．だから，まとめて式で書けば，$\boldsymbol{A}(t)$ がすべて道筋 (t) に沿って対応する同等なものになっているには，方程式

$$\dot{A}^i(t) = \Gamma^i_{jk}(t)A^k(t)\dot{\xi}^j(t) \tag{9.38}$$

を満たせばよい．

こうして $\boldsymbol{A}(t)$ を計算し，P 点から Q 点へ道筋 $\boldsymbol{\xi}(t)$ に沿って移したものを

$$\boldsymbol{A}(Q) = \prod\nolimits_{\boldsymbol{\xi}(t)} \boldsymbol{A}(P) \tag{9.39}$$

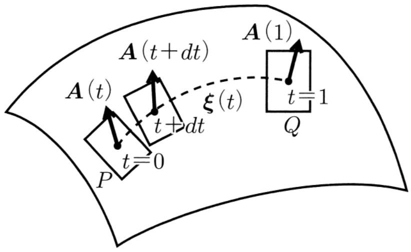


図 9.5　ベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ の平行移動．

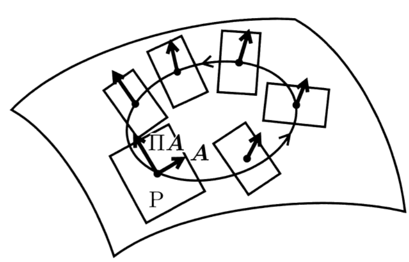


図 9.6　ベクトル $\boldsymbol{A}$ の世界一周．

と書く．これをベクトル $\boldsymbol{A}$ の P 点から Q 点への道筋 $\boldsymbol{\xi}(t)$ に沿った平行移動と言う（図 9.5）．測地線とは接ベクトルが平行移動で同じになる線といってもよい．

9.6 平坦な空間

平行移動するときの道筋は大切である．$\boldsymbol{A}$ を P 点から Q 点へ移すに際し，道筋 $\boldsymbol{\xi}(t)$ が違えば一般には答えが違うからである．いま，P 点から Q 点に道筋 $\boldsymbol{\xi}(t)$ に沿ってベクトル $\boldsymbol{A}$ を平行に移動したとしよう．これを同じ道筋に沿ってまた Q 点から P 点に戻せば，これは元の $\boldsymbol{A}$ に戻る．これは，平行移動の微分方程式 (9.38) を t について逆にたどることであり，答えが元に戻る．しかし，違う道筋で戻せば，一般に答えは違う．ベクトル $\boldsymbol{A}$ を行き帰りの道筋を変えて世界一周させよう．これには $\boldsymbol{\xi}(t)$ として $\boldsymbol{\xi}(0)=\boldsymbol{\xi}(1)$ となる閉曲線を考える．このとき，$\prod_{\boldsymbol{\xi}(t)} \boldsymbol{A}$ は $t=1$ では $t=0$ の $\boldsymbol{A}$ とは違うベクトルになる（図 9.6）．どのくらい違うのか，これには空間の曲率が関係する．行き帰りの道筋に囲まれた領域の内部の曲率テンソルの積分だけ違ってくる．ただし，今回は曲率の話に深入りするのはやめる．ただ Riemann–Christoffel の曲率テンソルは接続の係数 Γ_{ij}^k から次式で計算できることだけを述べておく．

$$R_{ijk}{}^{l}(\boldsymbol{\xi}) = \partial_i \Gamma_{jk}{}^{l} - \partial_j \Gamma_{ik}{}^{l} - \Gamma_{im}^{l}\Gamma_{jk}^{m} - \Gamma_{jm}^{l}\Gamma_{ik}^{m}, \tag{9.40}$$

ただし ∂_i は

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \tag{9.41}$$

の略記である．

道筋によらずにベクトルの平行移動が同じになる場合，つまり世界一周しても同じものに戻る場合は，曲率が 0 になる．これは空間が平坦な場合である．空間が平坦な場合，次の定理が成立する．

定理 9.1 接続から導く曲率テンソル $R_{ijk}{}^{l}(\boldsymbol{\xi})$ がいつも 0 の場合，空間は平坦でアファイン座標系 $\boldsymbol{\theta}$ が存在して，その座標系を用いると

$$\Gamma_{ij}^{k}(\boldsymbol{\theta}) = 0. \tag{9.42}$$

したがって，この座標系では各点の接空間の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ はどの点でも互いに対応していて平行移動で移りあう．測地線は

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b} \tag{9.43}$$

のように 1 次式で表され，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の平行移動はいつも $\boldsymbol{A}$ のままである．

曲率 $R = \left(R_{ijk}{}^{l}\right)$ が 0 ならば，これはどの座標系を用いて計算しても 0 である．これがテンソル式の良いところである．一般に，テンソルで書いた方程式

$$K_{ijkl} = 0 \tag{9.44}$$

があれば，座標系を $\boldsymbol{\xi}$ から $\boldsymbol{\zeta}$ に変えたときに，テンソルは各添字について座標変換の行列 A_i^κ または逆行列 A_κ^i を用いて変換し，添え字を $i, j, \cdots$ から $\kappa, \lambda, \cdots$ などへ書き換えるだけでよい．すると方程式は

$$K_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0 \tag{9.45}$$

となる．行列は正則だから，テンソル方程式は，どの座標系でも成立する．つまり，座標系によらない不変な法則が記述できる．相対性理論では，基本方程式をテンソル式で書いて，これを法則とした．

しかし，テンソルでない量は意味がないというわけではない．例えば，接続の係数 Γ_{ij}^k はテンソルではない．座標を変えれば，これは，

$$\Gamma_{\kappa\lambda}^\mu = A_\kappa^i A_\lambda^j A_k^\kappa \Gamma_{ij}^k + A_\kappa^i A_\mu^j \partial_i A_\lambda^j \tag{9.46}$$

のように変換される．だから，ある座標系でこれが 0 だからといって，他の座方形で 0 というわけではない．曲率 R が 0 の場合，うまい座標系 $\boldsymbol{\theta}$ が存在して，これを用いれば Γ_{ij}^k が 0 になる．

ユークリッド空間で，正規直交座標系をとれば，すべてが真っすぐで $\boldsymbol{e}_i$ はどこでも同じだから

$$\Gamma_{ij}^k = 0. \tag{9.47}$$

しかし，極座標系をとれば，座標軸の接線方向は曲がっている（r 方向は直線で真っすぐだが，角度方向は変わる）．これがどのように曲がっていくかを示すのが $\Gamma_{\kappa\lambda}^\mu$ である．各自，2次元極座標系での $\Gamma_{\kappa\lambda}^\mu$ を計算してみるのも良い演習である．

終わりの一言

いよいよ微分幾何入門である．細かい数式や概念にとらわれず，幾何の仕組みが直観的にわかるように心がけた．わかれば楽しいではないか．もちろん，もっと厳密に定義したり，数式を導きたいという読者もいるだろう．まず自分で計算して導いてみるのが一番良い．さらに，厳密な仕組みを求めるには，微分幾何の教科書を読めばよい．直観的な理解があれば，読破するのも難しくはない．私は，昔の Schouten の本[1]で勉強した．現代版は Kobayashi-Nomizu[2]である．しかし，最近はわかりやすい教科書がたくさんあるように思う[3]．

参考文献

1) J.A. Schouten, *Ricci Calculus*, Springer, 1954 (絶版).
2) S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, I, II*, Interscience, 1969.
3) W.M. Boothby, *An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry*, Elsevier, 2003.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

編集後記

今号から新連載「科学と社会」が始まりました．いかがでしたでしょうか．

「科学」と「社会」というのは一見，関係がなさそうですが，よく考えてみると「科学」の発展が「社会」に影響を与え，また，逆に「社会」からの要請で新たな「科学」が生まれることもあるような気がします．連載を通じて，「科学」や「社会」，またそれらの関係性など，新たな一面を見ていけるのではないかと思います．

歴史的にも，「科学」が創り出したものが「社会」へ多大な影響を与え人々の生活を変えたり，思考に変化をもたらした，ということがあるでしょう．もちろん，良い方向へ導くもの，悪い方向へ導くものの双方があると思います．

「社会」で有益になり，かつ「科学」サイドも満足できるようなものばかりであれば，と思いますが，皆さんはどんなことが思い浮かぶでしょうか．この先も「社会」に変革をもたらす「科学」が生まれると思いますが，それを考えるヒントになるかもしれません．　(R)

数　理　科　学　10月号

2011年10月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁